АЛГЕБРА

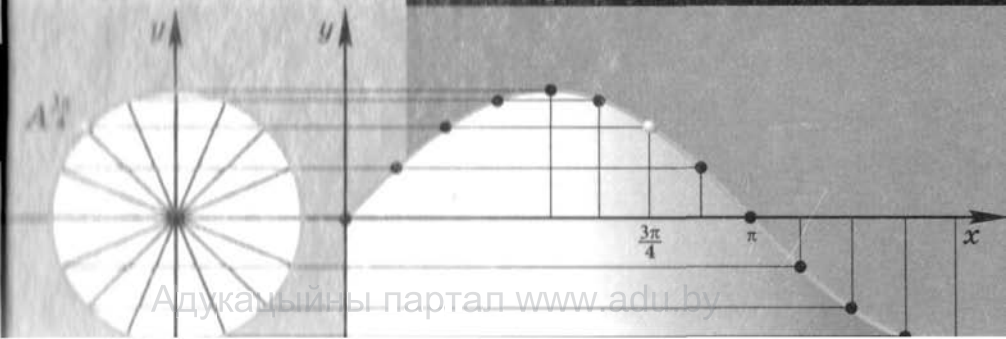
А

АЛГЕБРА

11

2008

Леонард Эйлер (1707 — 1783)



Адукацыйны партал www.adu.by

Правила дифференцирования

$$(cu)' = cu'$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$(uv)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Формулы дифференцирования

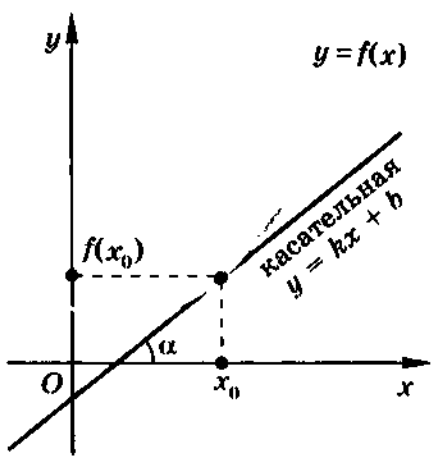
$c' = 0$ (c — постоянная)	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Механический (физический) смысл производной

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Геометрический смысл производной

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$



Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

т. е.

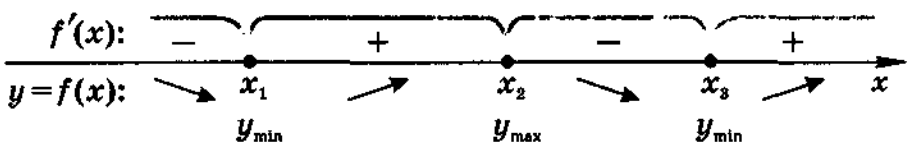
$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0;$$

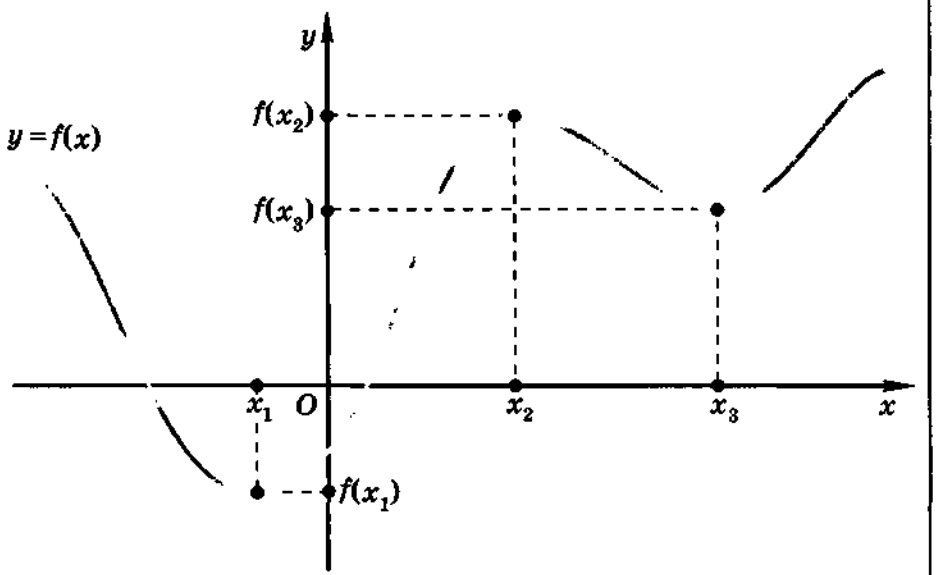
при $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$ и $b = f(x_0) - x_0 f'(x_0)$, получаем

$$y = kx + b$$

Точки максимума и точки минимума

$f'(x) = 0$, если $x = x_1$ или $x = x_2$ или $x = x_3$





Первообразная $(F(x))' = f(x)$

Функция $f(x)$	k	x	$ax+b$	$\frac{1}{x^2}$	x^n
Первообразная $F(x)$	$kx+C$	$\frac{x^2}{2}+C$	$\frac{ax^2}{2}+bx+C$	$-\frac{1}{x}+C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$

Адукацыйны партал www.edu.by

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 11 класса общеобразовательных учреждений с русским языком обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни)

Под редакцией профессора
Л. Б. Шнепермана

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

2-е издание, переработанное

Минск «Народная асвета» 2008

А ц

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721
А45

Авторы:
Е. П. Кузнецова, Г. Л. Муравьева, Л. Б. Шнеперман, Б. Ю. Ящин

Рецензенты:
кафедра алгебры и методики преподавания математики Витебского государственного университета им. П. М. Машерова (доктор пед. наук, профессор *К. О. Ананченко*);
учитель математики СШ № 153 г. Минска *А. И. Абрамович*,
учитель математики политехнической гимназии №6 г. Минска *С. А. Хомич*

Алгебра : учеб. пособие для 11-го кл. общеобразо-
А45 ват. учреждений с рус. яз. обучения с 12-летним сроком обучения (базовый и повышенный уровни) / Е. П. Кузнецова [и др.]; под. ред. Л. Б. Шнепермана. — 2-е изд., перераб. — Минск : Нар. асвета, 2008. — 336 с. : ил.
ISBN 978-985-12-1996-0.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.14я721

ISBN 978-985-12-1996-0

© Оформление. УП «Народная асвета», 2008

дукацыйны партал www.adu.by

ОТ АВТОРОВ

В 11-м классе вы познакомитесь с очень важным понятием производной функции и узнаете, как с помощью производной можно установить некоторые свойства функции. Вы будете изучать также тригонометрические выражения и тригонометрические функции, изображать графики функций, решать тригонометрические уравнения и неравенства.

* * *

Упражнения в этой книге нумеруются по главам. Число перед точкой обозначает номер главы, число после точки — номер упражнения в этой главе. Например, 1.15 — это 15-е упражнение из 1-й главы. Аналогично нумеруются и пункты теории. Пункт 3.7 обозначает 7-й пункт из 3-й главы.

Среди упражнений встречаются номера с кружком (например, 2.20°), номера со звездочкой (например, 1.113*) и номера без всяких обозначений (например, 2.38). Кружочком отмечены упражнения, которые должны уметь решать все ученики, желающие успевать по математике хотя бы на 5—6 баллов. Среди остальных заданий наиболее трудные отмечены звездочкой. Многие из таких упражнений помещены в сборнике задач; там же предлагаются задания для повторения курса алгебры 11-го класса.

Пояснения к преобразованиям, которые даются по ходу решения примера, размещены между двумя вертикальными стрелками (↓...↓ или ↑...↑);

направление стрелок показывает, какое именно преобразование поясняется.

Окончание доказательства теоретического утверждения обозначается светлым квадратиком с диагоналями ☒. Теоретический материал, выделенный треугольниками ▲, адресован учащимся, изучающим математику на повышенном уровне. Особенности теоретического материала, на которые надо обратить внимание, отмечены восклицательным знаком

Весы нарисованы там, где есть возможность сравнивать варианты решения или доказательства.

Исторические сведения, которые встречаются в книге, отмечены знаком .

Материал на повторение отмечен знаком .

После каждого пункта теории предложены вопросы под знаком . Они помогут повторить новый материал и выделить в нем главное.

Глава 1

Производная

1.1. Функция

Напомним определение функции и некоторые свойства функции.

Определение. ***Функцией*, заданной на множестве D, называется закон, по которому каждому значению x из множества D ставится в соответствие одно определенное значение y.**

При этом x называют *независимой переменной*, или *аргументом*, y — *зависимой переменной*, или *функцией от x*, множество D — *областью определения функции*.

Будем обозначать функцию какой-нибудь буквой, скажем f, а ее значение в точке x будем обозначать $f(x)$ (читается «*эф от икс*»).

При таких обозначениях аргумента и функции тот факт, что y является функцией от x, записывается в виде равенства $y=f(x)$, а функцию f называют еще «функция $f(x)$» или «функция $y=f(x)$». Пишут также $y(x)$.

Заметим, что для обозначения функции можно употреблять и другие буквы, например g, h и т. п.

Рассмотрим несколько примеров функций.

Пример 1. Для функции f, заданной формулой $y=x^2$, символ f означает возведение аргумента в квадрат, а $f(x)=x^2$.

Пример 2. Для функции f, заданной формулой $y=\frac{1}{x}$, символ f означает отыскание числа, обратного аргументу, а $f(x)=\frac{1}{x}$.

Пример 3. Для функции f, заданной формулой $y=\sqrt{x}$, символ f означает извлечение арифметического квадратного корня из аргумента, а $f(x)=\sqrt{x}$.

дукацыйны партал www.adu.by

Область определения функции f обозначается $D(f)$.

Если функция f задана формулой $y = f(x)$, а ее область определения не указана, то считается, что область определения $D(f)$ состоит из тех значений x, при которых выражение $f(x)$ имеет смысл. Когда в задании требуется найти область определения функции $y = f(x)$, то имеется в виду, что надо указать именно естественную область определения выражения $f(x)$.

Так, в примере 1 область определения $D(f) = \boldsymbol{R}$; в примере 2 область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в примере 3 область определения $D(f) = [0; +\infty)$.

Напомним, что множество всех значений, которые может принимать функция, называется ***областью (множеством) значений функции***.

Область (множество) значений функции f обозначается $E(f)$. Так, в примере 1 область значений $E(f) = [0; +\infty)$; в примере 2 область значений $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; в примере 3 область значений $E(f) = [0; +\infty)$.

Графиком функции f называется множество всех точек $(x; f(x))$ на координатной плоскости, где $x \in D(f)$, т. е. множество всех таких точек, абсциссы которых — значения аргумента, а ординаты — соответствующие им значения функции.

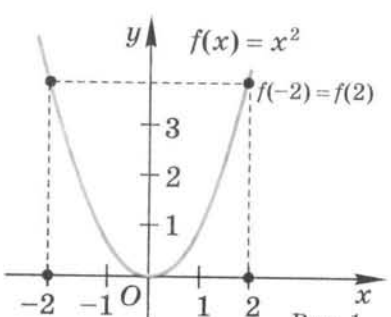


Рис. 1

Таким образом, при изображении графика функции $y = f(x)$ на координатной плоскости Oxy отмечают точки $(x; f(x))$.

На каждом из рисунков 1, 2, 3 изображен график функции $y = f(x)$ соответственно для случаев: $f(x) = x^2$; $f(x) = \frac{1}{x}$; $f(x) = \sqrt{x}$.

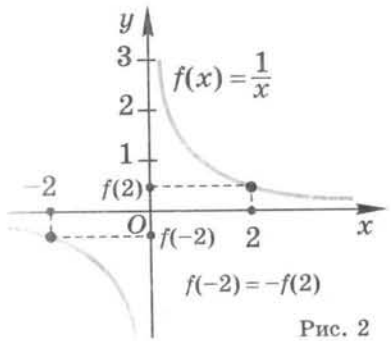


Рис. 2

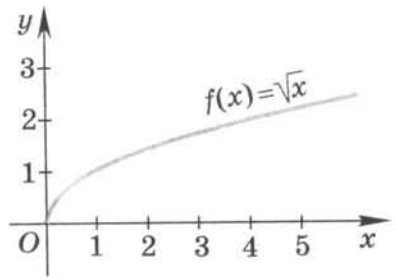


Рис. 3

Определение. **Функция f называется *возрастающей на некотором промежутке*, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$.**

Функция f называется *убывающей на некотором промежутке*, если на этом промежутке большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$.

Так, в примере 1 функция f — убывающая на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастающая на промежутке $[0; +\infty)$; в примере 2 функция f — убывающая на промежутке $(-\infty; 0)$ и убывающая на промежутке $(0; +\infty)$; в примере 3 функция f — возрастающая в области определения.

При исследовании функций на возрастание и убывание принято указывать промежутки возрастания и промежутки убывания наибольшей длины.

Определение. **Функция f называется *четной*, если для любого значения x из ее области определения значение $-x$ также принадлежит области определения и верно равенство**

$$f(-x) = f(x).$$

Таким образом, область определения четной функции симметрична относительно нуля.

Адукацыйны партал www.adu.by

Функция $f(x) = x^2$ четная, так как область определения $D(f) = R$ симметрична относительно нуля и при этом для любого $x \in D(f)$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

По определению четной функции точки ее графика с противоположными абсциссами $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ имеют одну и ту же ординату. Значит, эти точки симметричны относительно оси ординат, и, следовательно, график четной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 1).

Определение. Функция f называется *нечетной*, если для любого x из ее области определения значение $-x$ также принадлежит области определения и верно равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Таким образом, область определения нечетной функции симметрична относительно нуля.

Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ нечетная, так как область определения $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ симметрична относительно нуля и при этом для любого $x \in D(f)$

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x).$$

По определению нечетной функции точки ее графика с противоположными абсциссами $(x; f(x))$ и $(-x; f(-x))$ имеют ординатами противоположные числа. Значит, эти точки симметричны относительно начала координат, и, следовательно, график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 2).

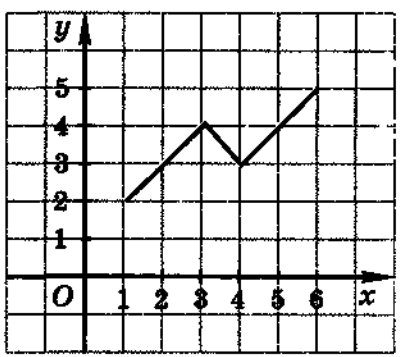


Рис. 4

При изображении графика четной (нечетной) функции достаточно построить сначала часть графика с неотрицательными значениями аргумента и затем отобразить построенную часть симметрично относительно оси Oy для четной функции (симметрично относительно начала координат для нечетной функции). Так, используя изображение на рисунке 4, получили изображения графика четной функции (рис. 5) и нечетной функции (рис. 6).

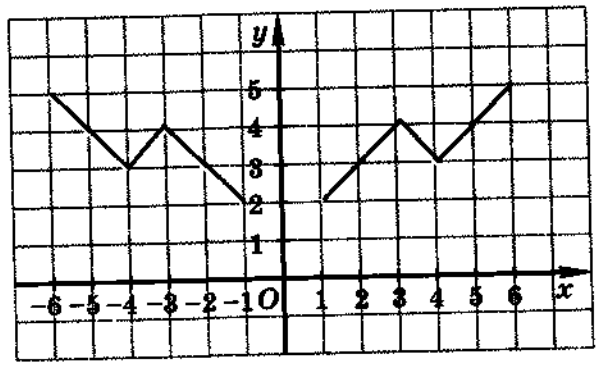


Рис. 5

Функция $f(x) = \sqrt{x}$ не является ни четной, ни нечетной, так как ее область определения не симметрична относительно нуля ($D(f)$ содержит только неотрицательные числа, см. рис. 3).

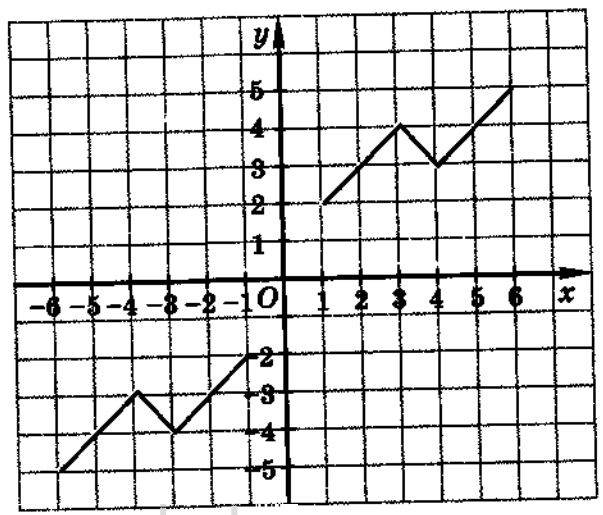


Рис. 6

Адукацыйны партал www.adu.by

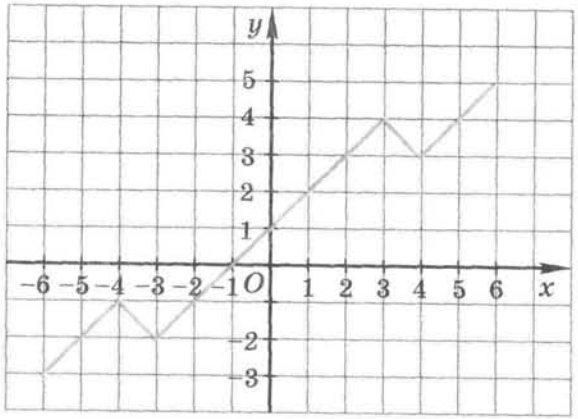


Рис. 7

На рисунке 7 изображен график функции с симметричной относительно нуля областью определения. Однако эта функция не обладает ни свойством четности, ни свойством нечетности, так как ее график не симметричен ни относительно оси ординат Oy, ни относительно начала координат.

а

Обозначение $f(x)$ для произвольной функции в 1734 г. ввел Л. Эйлер (1707—1783).

Крупнейший ученый XVIII столетия Леонард Эйлер родился в швейцарском городе Базеле. В 1727 г. он приехал в Россию, где и провел большую часть своей творческой жизни. Леонарда Эйлера современники называли общим учителем и первым математиком мира, а XVIII век в истории математики часто называют веком Эйлера. В работах Эйлера охвачены все области математики. Именем Эйлера названы различные формулы, уравнения, теоремы, методы.

Эйлер постоянно интересовался и практическими приложениями математики. Среди его произведений есть труды по гидравлике, кораблестроению, артиллерии, геометрической оптике, теории музыки, астрономии, механике твердого тела, небесной механике.

?

1. Сформулируйте определение функции.
2. Что называется графиком функции f?
3. Может ли график функции иметь несколько точек пересечения с осью Ox? С осью Oy?
4. Как обозначаются область определения и область (множество) значений функции f?
5. Сформулируйте определение функции, возрастающей (убывающей) на некотором промежутке.
6. Сформулируйте определение четной (нечетной) функции. Каковы особенности области определения такой функции?
7. Каковы свойства графика четной (нечетной) функции?

Упражнения

1.1°. На каком из рисунков 8 ($а$—$е$) линия синего цвета может служить изображением графика некоторой функции $y = f(x)$?

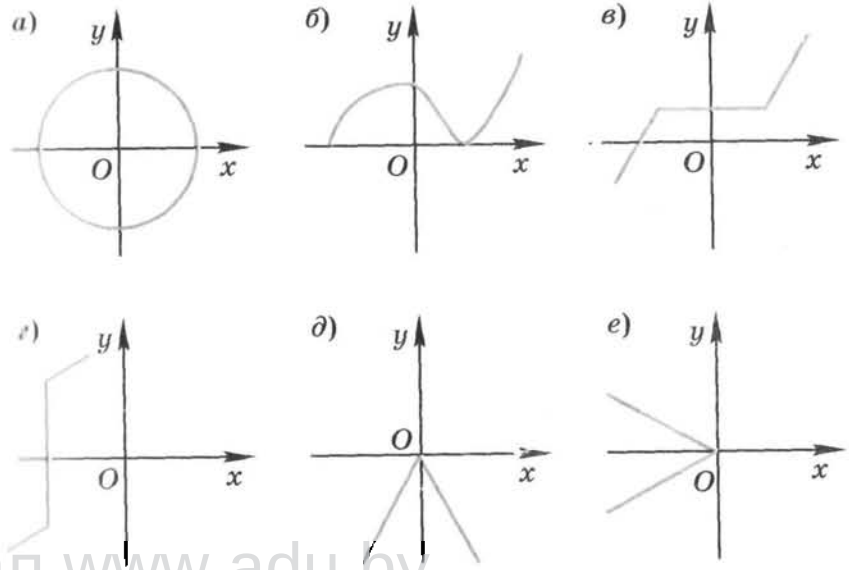


Рис. 8

Адукацыйны партал www.adu.by

1.2°. Для функции f, заданной графиком (рис. 9—12), укажите:

а) область определения $D(f)$;
б) область (множество) значений $E(f)$;
в) нули;
г) координаты точки пересечения графика с осью Oy.

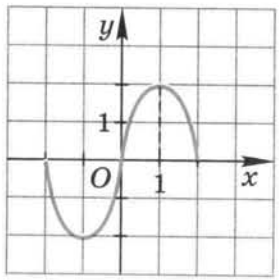


Рис. 9

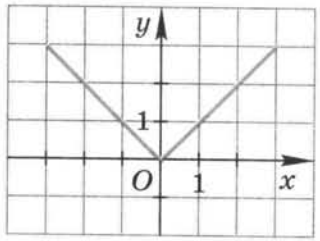


Рис. 10

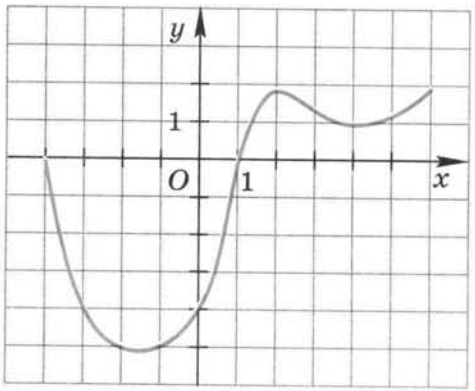


Рис. 11

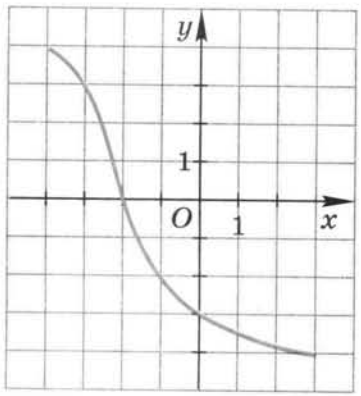


Рис. 12

1.3. Используя изображение графика функции $y = f(x)$ (рис. 13—16), укажите для нее:

а) промежутки возрастания;
б) промежутки убывания;
в) наибольшее значение;
г) наименьшее значение;
д) нули;
е) промежутки знакопостоянства;

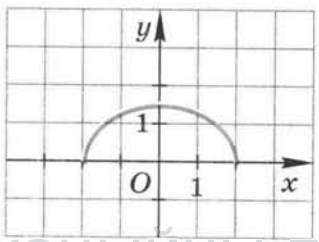


Рис. 13

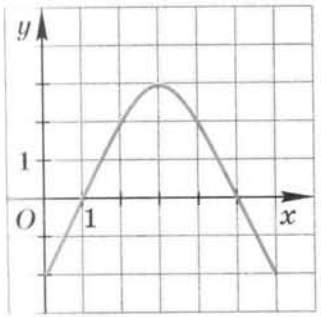


Рис. 14

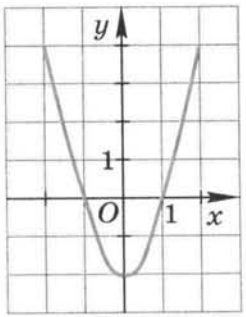


Рис. 15

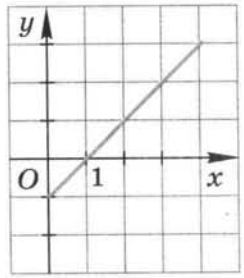


Рис. 16

ж) координаты точки пересечения графика с осью Oy;
з) координаты точки пересечения графика с осью Ox.

1.4. Укажите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{5 + 10x}$; 2) $f(x) = \sqrt{6 - 24x}$;

3) $f(x) = \dfrac{x+8}{\sqrt{9+8x-x^2}}$; 4) $f(x) = \dfrac{3x-21}{\sqrt{40-3x-x^2}}$;

5) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-25x}}{x^2-1}$; 6) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-49x}}{x^2-11x-26}$.

1.5. Найдите нули функции:

1) $f(x) = |x-5| - 1$; 2) $f(x) = |x+4| - 8$;

3) $f(x) = |x^2+3x| - 4$; 4) $f(x) = |x^2+11x| - 12$;

5) $f(x) = (x-3)^3 - (x^2-9)$; 6) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$.

1.6°. Используя график функции $y = f(x)$, укажите для этой функции промежутки возрастания (убывания), если:

1) $f(x) = x + 3$; 2) $f(x) = -3x + 6$; 3) $f(x) = \dfrac{6}{x}$;

4) $f(x) = -\dfrac{7}{x}$; 5) $f(x) = x^2$; 6) $f(x) = x^3$;

7) $f(x) = |x|$; 8) $f(x) = -x^4$.

1.7. Укажите промежутки знакопостоянства функции f:

1) $f(x) = -3x^2 + 7x$; 2) $f(x) = -5x^2 + 12x$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x+3} - 1$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x-5} + 2$;

5) $f(x) = 3 - 5\sqrt{2-x}$; 6) $f(x) = 4 - 3\sqrt{6-x}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

1.8°. Укажите, какие из функций, заданных графиком (рис. 17), являются:

1) четными; 2) нечетными.

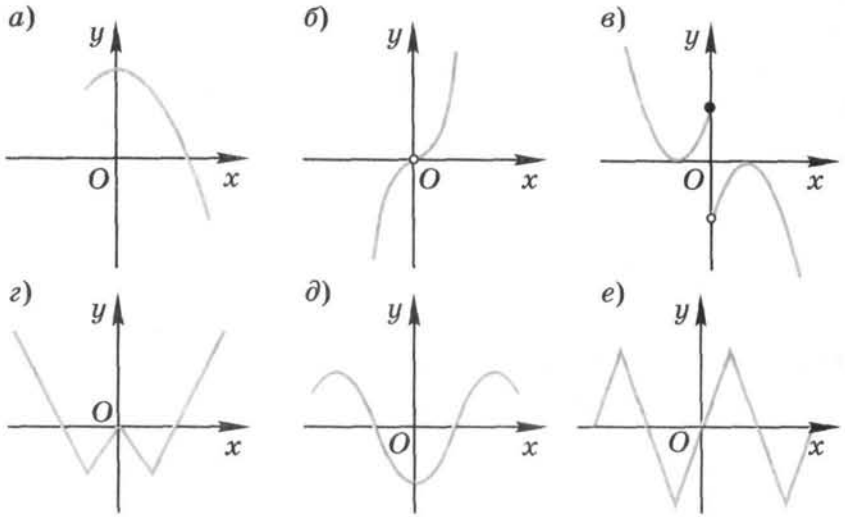


Рис. 17

1.9. 1) Известно, что функция $f(x)$ с областью определения $[-4; 4]$ является четной. Часть ее графика изображена на рисунках 18 и 19. Изобразите график функции $y = f(x)$.

2) Известно, что функция $f(x)$ с областью определения $[-4; 4]$ является нечетной. Часть ее графика изображена на рисунках 18 и 19. Изобразите график функции $y = f(x)$.

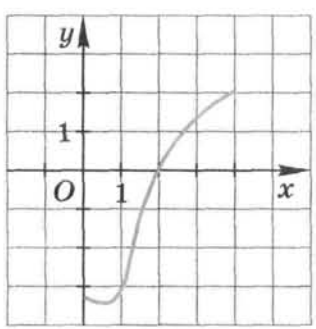


Рис. 18

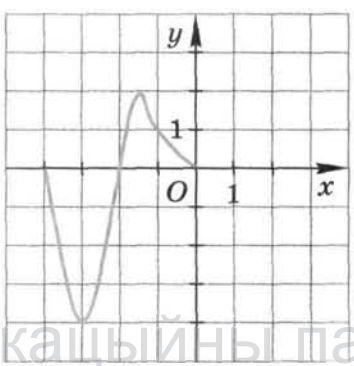


Рис. 19

1.10°. 1) Известно, что функция f является четной и $f(2) = 5$, $f(-10) = -8$, $f(7) = -9{,}3$, $f(-4) = 0$. Найдите $f(-2)$, $f(10)$, $f(-7)$, $f(4)$.

2) Известно, что функция f является нечетной и $f(-5) = 2$, $f(16) = 1$, $f(-1) = 2{,}5$, $f(-3) = -4$. Найдите $f(5)$, $f(-16)$, $f(1)$, $f(3)$.

1.11. Докажите, что функция f четная, если:

1) $f(x) = \dfrac{16x^4}{x^2+1}$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x|}$;

3) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 4x^8} + |x| + \dfrac{3}{x^6-1}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^2 + 4} - \sqrt{x^2} - \dfrac{x^{10}}{6-x^6}$;

5) $f(x) = \sqrt{5x^2-3} + \sqrt{3x^2-5}$;

6) $f(x) = |8x^4 - 10| + |10 - 8x^4|$.

1.12. Докажите, что функция f нечетная, если:

1) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-9}$;

2) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$;

3) $f(x) = x^{13} - \dfrac{2x^{21}}{\sqrt{x^8}}$;

4) $f(x) = (x^3)^5 + \dfrac{2}{(x^{11})^3}$;

5) $f(x) = x\sqrt{25x^{12}} - \dfrac{6x^{10}}{x^5 - x^3}$;

6) $f(x) = x\sqrt{x^4} + \dfrac{3}{x^3\sqrt{x^4 + 10x^2 + 25}}$.

1.13°. Функция f задана на множестве Q и является возрастающей в области определения. Сравните значения функции:

1) $f(5)$ и $f(-2)$;

2) $f(-8)$ и $f(8)$;

3) $f\left(\frac{1}{3}\right)$ и $f\left(\frac{1}{4}\right)$;

4) $f\left(-\frac{4}{5}\right)$ и $f\left(-\frac{5}{7}\right)$;

5) $f(2\sqrt{2})$ и $f(\sqrt{11})$;

6) $f(3\sqrt{2})$ и $f(\sqrt{19})$.

Адукацыйны партал www.adu.by

1.14°. Функция f задана на множестве Q и является убывающей в области определения. Сравните значения функции:

1) $f(29)$ и $f(30)$; 2) $f(-100)$ и $f(200)$;

3) $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ и $f\left(-\frac{4}{5}\right)$; 4) $f\left(\frac{5}{7}\right)$ и $f\left(\frac{17}{21}\right)$.

1.2. Угловой коэффициент прямой

Изобразим на координатной плоскости Oxy прямую

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Углом наклона этой прямой к оси Ox называется угол α, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против хода часовой стрелки (рис. 20, *а*, *б*). Если прямая (1) параллельна оси Ox, то угол наклона считается равным нулю.

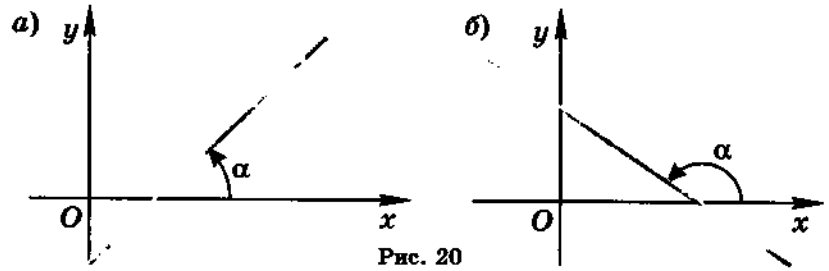


Рис. 20

Как мы знаем, прямая (1) не параллельна оси Oy (поясните почему), поэтому $\alpha \neq 90°$, т. е. $0° \leqslant \alpha < 90°$ или $90° < \alpha < 180°$.

Прямая $y = kx + b$ параллельна прямой $y = kx$ (рис. 21).

Из треугольника MPO ($\angle P = 90°$) видно, что

$$k = \frac{y_0}{x_0} = \frac{MP}{OP} = \operatorname{tg}\alpha.$$

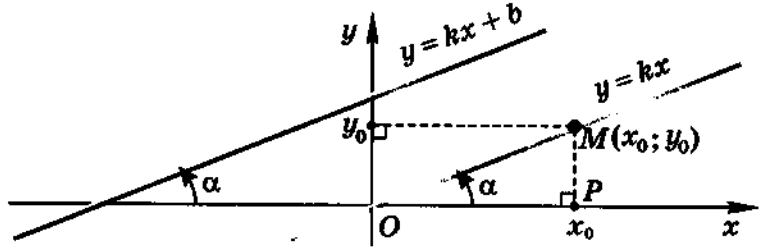


Рис. 21

Коэффициент k в уравнении $y = kx + b$ называется ***угловым коэффициентом прямой***.

Пример 1. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом 3, проходящей через точку $T(-2; 1)$.

Решение. Пусть $y = 3x + b$ — уравнение искомой прямой. Подставив в него координаты точки T, получим уравнение

$$1 = 3(-2) + b,$$

откуда найдем $b = 7$.

Ответ: $y = 3x + 7$.

Пример 2. Написать уравнение прямой, проходящей через точки $M(-2; 9)$ и $P(4; -3)$.

Решение. Пусть $y = kx + b$ — уравнение искомой прямой. Подставив в него координаты точек M и P, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 9 = -2k + b, \\ -3 = 4k + b. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем:

$$k = -2,\ b = 5.$$

Ответ: $y = -2x + 5$.

▲ Если прямая (1) проходит через точку $(x_0; y_0)$, то будет верным равенство

$$y_0 = kx_0 + b. \qquad (2)$$

Если координаты некоторой точки $(x; y)$ удовлетворяют уравнению прямой (1), то они будут удовлетворять и уравнению

$$y - y_0 = k(x - x_0), \qquad (3)$$

полученному из равенства (2) и уравнения (1). Верно и обратное утверждение. Таким образом, уравнениями (1) и (3) задается одна и та же прямая. Но по уравнению (3) сразу видно, что данная прямая проходит через точку $(x_0; y_0)$ (поясните почему).

Уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$ называется ***уравнением прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$***.

Адукацыйны партал www.adu.by

Пример 3. Написать уравнение прямой с угловым коэффициентом 2, проходящей через точку (3; –1).

Решение. *Способ 1* — см. решение примера 1.

Способ 2. В уравнение (3) подставим $k = 2$, $x_0 = 3$ и $y_0 = -1$. Тогда получим уравнение прямой:

$$y + 1 = 2(x - 3), \text{ т. е. } y = 2x - 7.$$

Ответ: $y = 2x - 7$.

Пусть прямая (1) проходит через две точки: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$; тогда имеем два верных числовых равенства:

$$y_1 = kx_1 + b,\ y_2 = kx_2 + b.$$

Откуда получаем также верное равенство (поясните как):

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Так как прямая (1) не параллельна оси Oy, то $x_2 \neq x_1$ (поясните почему). Следовательно, имеем

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4)$$

Это ***формула углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки.***

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точки (–1; 7) и (2; 4).

Решение. *Способ 1* — см. решение примера 2.

Способ 2. Угловой коэффициент прямой найдем по формуле (4):

$$k = \frac{4 - 7}{2 + 1} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом –1, проходящей через точку (–1; 7):

$$y - 7 = -1\,(x + 1), \text{ т. е. } y = -x + 6.$$

Ответ: $y = -x + 6$.

Понятно, что можно было записать и уравнение прямой с угловым коэффициентом –1, проходящей через точку (2; 4). Получили бы такой же результат (проверьте это). ▲

1. Сформулируйте определение угла наклона прямой к оси Ox.
2. Что называется угловым коэффициентом прямой?
3. Чему равен угловой коэффициент прямой?

4*. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$.

5*. Запишите формулу углового коэффициента прямой, проходящей через две данные точки.

Упражнения

1.15°. Укажите угловой коэффициент прямой:

1) $y = 3x + 8$; 2) $y = 12x - 7$; 3) $y = 5 - 1{,}5x$;

4) $y = 4 + \frac{2}{3}x$; 5) $y = \frac{x}{6} - 4$; 6) $y = 9 - \frac{x}{12}$.

1.16°. Укажите угловой коэффициент прямой, изображенной на рисунке 22.

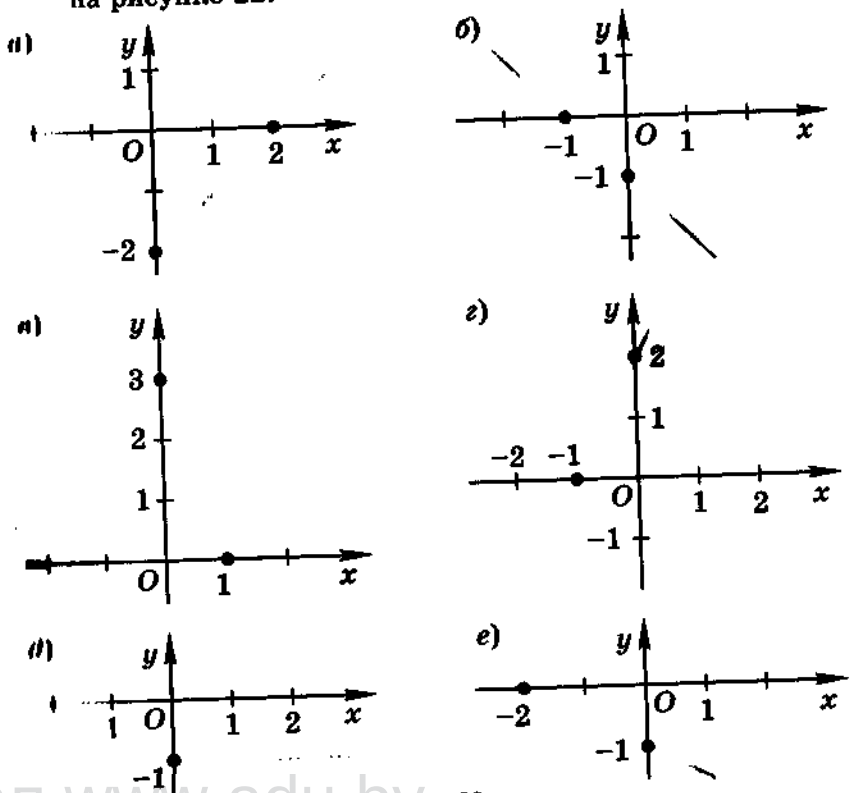


Рис. 22

Адукацыйны партал www.adu.by

1.17. Изобразите прямую, проходящую через точку $F(2; 6)$, с угловым коэффициентом k, если:

1) $k = 4$; 2) $k = -4$;

3) $k = -\frac{1}{3}$; 4) $k = 0{,}2$.

1.18. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$, если:

1) $k = -\frac{1}{9}$, $M(-1; -2)$; 2) $k = \frac{2}{3}$, $M(7; -1)$;

3) $k = \sqrt{121}$, $M(2; 6)$; 4) $k = -\sqrt{100}$, $M(-4; 1)$.

1.19. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки A и B, если:

1) $A(1; -2)$; $B(-3; 2)$; 2) $A(2; 5)$; $B(3; 0)$;

3) $A(-4; -5)$; $B(2; 1)$; 4) $A(-6; 3)$; $B(-1; -1)$.

1.20°. Назовите пары параллельных прямых:

1) $y = 4x - 9$; 2) $y = 5x - 1$; 3) $y = 4 - x$;

4) $y = 3 + 4x$; 5) $y = \sqrt{25}x + 1$; 6) $y = (-1)^{15}x + 3$.

1.21. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(x; y)$ и параллельной прямой $y = -x + 5$:

1) $P(2; -3)$; 2) $P(-5; -1)$;

3) $P(4; 1)$; 4) $P(-1; -1)$.

1.22. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(-5; 2)$ и параллельной прямой:

1) $y = \frac{x}{4} - 1$; 2) $y = 6 - \frac{x}{3}$;

3) $y = \sqrt{5} - 0{,}7x$; 4) $y = \sqrt{\pi} + 0{,}1x$.

1.23. Составьте уравнение прямой, которая параллельна прямой $4(x + 2y) - 8 = 5x - 2$ и проходит через точку пересечения прямых:

1) $y = 2x$ и $y = x + 3$; 2) $y = 4x$ и $y = x - 3$;

3) $y = 2x - 3$ и $x = 9$; 4) $y = 4x + 6$ и $y = -2$.

1.24. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $R(3; 1)$ и пересекающей ось Ox под углом α, если:

1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 60°$; 3) $\alpha = 120°$.

1.25. Составьте уравнение прямой, пересекающей ось Ox под углом 30° и проходящей через точку пересечения прямых:

1) $y = 5 - x$ и $y = x - 3$;

2) $y = 1 - 2x$ и $y = 2x - 3$;

3) $2x + 11y = 15$ и $10x - 11y = 9$;

4) $x + 3y = -7$ и $2x + 15y = -11$.

1.26. 1) Найдите угловой коэффициент прямой $y = kx + 5$, если она пересекается с прямой $y = -0{,}5x - 1$ в точке с абсциссой, равной $-0{,}8$.

2) Найдите угловой коэффициент прямой $y = kx - 1$, если она пересекается с прямой $y = 8x + 2$ в точке с абсциссой, равной $-0{,}2$.

1.27*. Под каким углом пересекает ось Ox прямая, проходящая через точки M и N, если:

1) $M(-1; 2)$ и $N(-4; -1)$; 2) $M(1; 2)$ и $N(5; -2)$?

1.3. Приращение функции

Промежутки вида $(a; b)$, $(-\infty; a)$, $(a; +\infty)$ называются *интервалами*.

Окрестностью точки x_0 называется любой интервал, содержащий эту точку.

Например, окрестностью точки -1 является интервал $(-2; 0)$, окрестностью точки 3 — интервал $(-1; 10)$, а окрестностью точки 5 — интервал $(0; +\infty)$ (рис. 23).

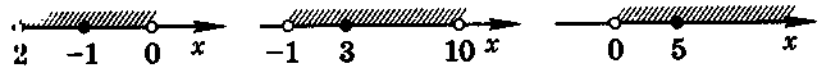


Рис. 23

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть x_0 — фиксированная точка из области определения этой функции, x — произвольная точка из некоторой окрестности точки x_0, причем $x \neq x_0$.

Разность $x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** в точке x_0.

Разность $f(x) - f(x_0)$ называется ***приращением функции*** в точке x_0.

А укацыйны партал www.adu.by

Приращение аргумента в точке x_0 обозначается Δx (читается «*дельта икс*»), приращение функции в точке x_0 обозначается Δy (читается «*дельта игрек*»). Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0, \text{ откуда } x = x_0 + \Delta x;$$
$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Геометрический смысл приращений Δx и Δy виден на рисунке 24.

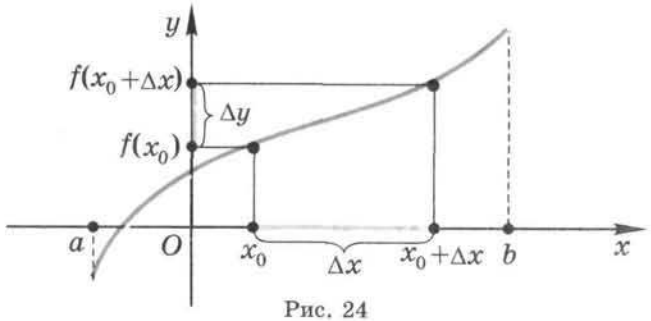


Рис. 24

Заметим, что так как x_0 — фиксированная точка (т. е. x_0 — конкретное число), то равенством $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ задана функция от Δx.

Пример 1. Найти приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, если:

а) $f(x) = 3x - 1$; б) $f(x) = x^2$;

в) $f(x) = \frac{4}{x}$; г)* $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение.

а) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 3(x_0 + \Delta x) - 1 - 3x_0 + 1 = 3\Delta x$.

б) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$.

в) Пусть $x_0 + \Delta x \neq 0$, тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{4}{x_0 + \Delta x} - \frac{4}{x_0} = \frac{-4\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}.$$

▲ г) Пусть $x_0 + \Delta x \geqslant 0$, тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}. \text{ ▲}$$

Адукацыйны партал

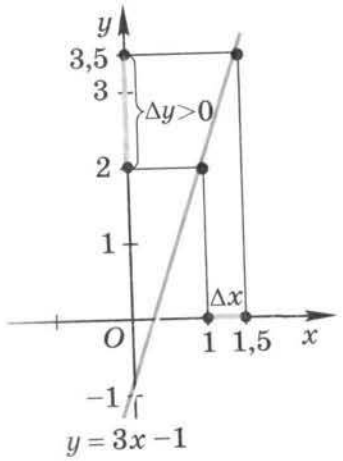


Рис. 25

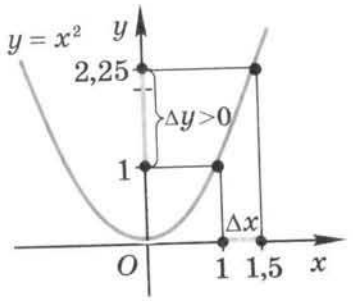


Рис. 26

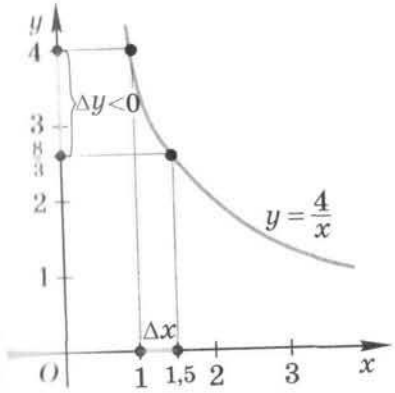


Рис. 27

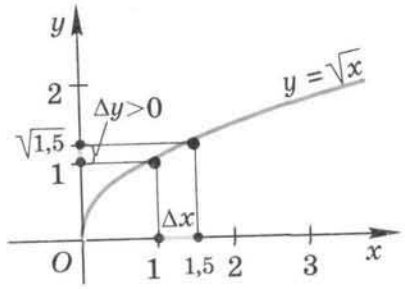


Рис. 28

Пример 2. Вычислить значения приращений функций из примера 1, если $x_0 = 1$, а $\Delta x = 0{,}5$. Изобразить приращение каждой из функций на графике.

Решение. а) $\Delta y = 3\Delta x = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ (рис. 25).

б) $\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + (0{,}5)^2 = 1{,}25$ (рис. 26).

в) $\Delta y = \frac{-4\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-4 \cdot 0{,}5}{1(1 + 0{,}5)} = -\frac{4}{3}$ (рис. 27).

г) $\Delta y = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} = \sqrt{1 + 0{,}5} - \sqrt{1} = \sqrt{1{,}5} - 1 \approx 0{,}22$ (рис. 28).

1. Что называется окрестностью точки x_0?
2. Что называется приращением аргумента функции в точке x_0?
3. Что называется приращением функции f в точке x_0?
4. Как обозначается приращение аргумента? Приращение функции?
5. Почему приращение функции Δy в точке x_0 можно считать функцией от приращения аргумента Δx?

Упражнения

1.28°. По рисунку 29 запишите числовым промежутком заштрихованную окрестность точки:

1) 5; 2) 0,5; 3) –6; 4) –8.

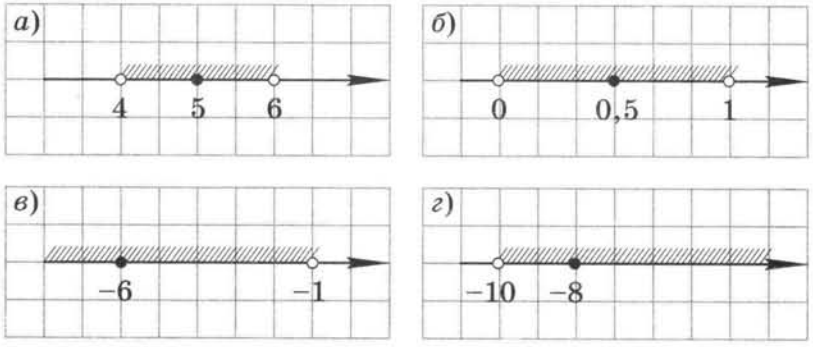


Рис. 29

1.29°. Укажите три различные окрестности точки:

1) 2; 2) 7; 3) –12; 4) –25.

1.30°. Укажите три точки, принадлежащие окрестности:

1) (12; 15); 2) (–13; –11);
3) $(-\infty; -100)$; 4) $(31; +\infty)$.

1.31°. По рисунку 30 укажите приращение аргумента Δx в точке x_0 и приращение функции Δf в точке x_0.

1.32°. Найдите приращение функции $y = f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, если:

1) $f(x) = 5x - 3$; 2) $f(x) = 1 - 3x$;

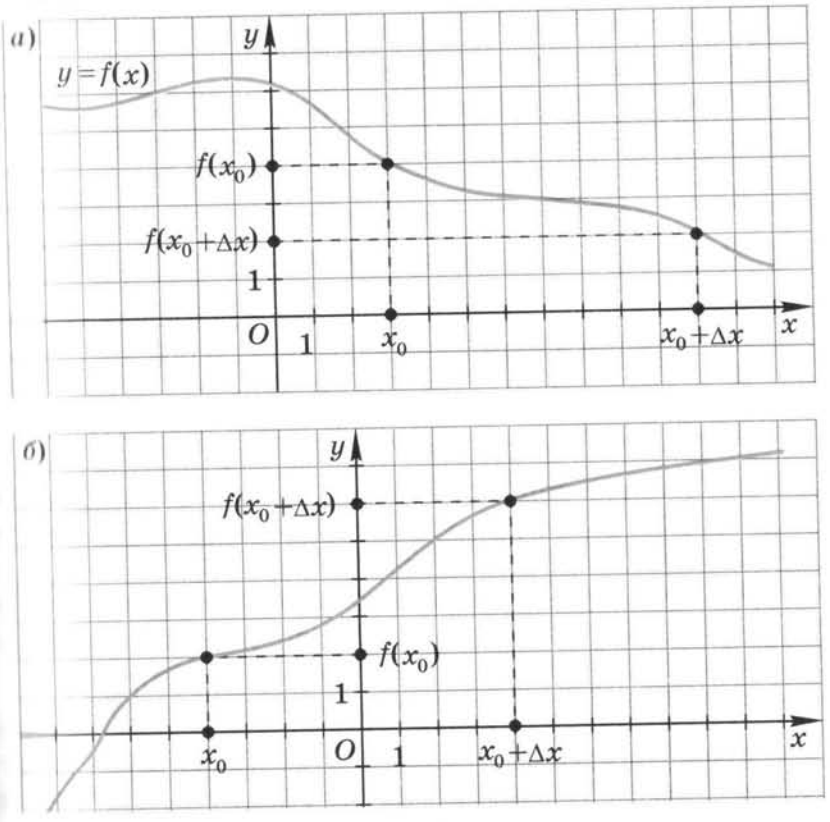


Рис. 30

3) $f(x) = x^2 + 1$; 4) $f(x) = 2 - x^2$;

5) $f(x) = \frac{1}{x}$; 6) $f(x) = \frac{3}{x} + 4$.

1.33. Найдите приращение Δy функции $y = f(x)$ в точке x_0 и изобразите приращение функции f на ее графике, если:

1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}4$;
2) $f(x) = 5x + 2$, $x_0 = 0{,}2$, $\Delta x = 0{,}5$;
3) $f(x) = 2x^2 + 1$, $x_0 = \frac{1}{4}$, $\Delta x = -0{,}8$;
4) $f(x) = 4 - 3x^2$, $x_0 = 5$, $\Delta x = -0{,}6$;
5) $f(x) = -\frac{6}{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}6$;
6) $f(x) = \frac{2}{x} - 1$, $x_0 = -2$, $\Delta x = -0{,}9$.

Адукацыйны партал www.adu.by

1.34. Найдите приращение аргумента Δx и приращение функции Δy в точке x_0, если:

1) $f(x)=\frac{x}{4}+8$, $x_0=-4{,}9$, $x=-3{,}4$;

2) $f(x)=5-\frac{x}{2}$, $x_0=-2{,}4$, $x=1{,}2$;

3) $f(x)=x+2x^2$, $x_0=2{,}1$, $x=-1{,}3$;

4) $f(x)=\frac{x^2}{6}-x$, $x_0=-1{,}8$, $x=0{,}4$.

1.35*. Найдите приращение функции $y=f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению аргумента Δx, если:

1) $f(x)=\sqrt{x}-1$; 2) $f(x)=2\sqrt{x}+3$;

3) $f(x)=\sqrt{4x-1}$; 4) $f(x)=2-\sqrt{2x+3}$.

1.36. 1) Сравните приращения функций $f(x)=3x^2$ и $g(x)=5x+25$ в точке $x=1$, если приращение аргумента $\Delta x=-0{,}1$.

2) Сравните приращения функций $f(x)=2x^2-3$ и $g(x)=-2x-10$ в точке $x=2$, если приращение аргумента $\Delta x=0{,}5$.

1.37. 1) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $E(1;-2)$, если известно, что приращение функции $\Delta y=-0{,}3$ соответствует приращению аргумента $\Delta x=0{,}1$.

2) Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $P(-4;3)$, если известно, что приращение функции $\Delta y=1{,}5$ соответствует приращению аргумента $\Delta x=-0{,}4$.

1.4. Производная

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, где $f(x)=x^2$. Приращение этой функции в точке x_0 (см. п. 1.3, пример 1, б) равно

$$\Delta y=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Рассмотрим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x. \qquad (1)$$

Будем придавать приращению Δx значения, все меньше и меньше отличающиеся от нуля, но не равные нулю. Это записывается так: $\Delta x\to 0$ (читается «*Δx стремится к нулю*»).

Так как значение $2x_0$ постоянно и не зависит от Δx, то, когда Δx все меньше и меньше отличается от нуля, сумма $2x_0+\Delta x$ все меньше и меньше отличается от числа $2x_0$. Это записывается так:

$$2x_0+\Delta x\to 2x_0 \text{ при } \Delta x\to 0 \qquad (2)$$

(читается «*$2x_0+\Delta x$ стремится к $2x_0$ при Δx, стремящемся к нулю*»).

Из (1) и (2) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x_0 \text{ при } \Delta x\to 0.$$

Это число $2x_0$, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$, называется ***производной функции $y=x^2$ в точке x_0***.

Определение. ***Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0*** **называется число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.**

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ (читается «*эф штрих от x_0*»).

Таким образом, для функции $f(x)=x^2$ мы получили производную в точке x_0:

$$f'(x_0)=2x_0.$$

Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную в каждой точке из некоторого промежутка. Поставив в соответствие каждому числу x число $f'(x)$, мы получим новую функцию, которая называется ***производной функции f*** и обозначается f', или y'.

Так, для функции $f(x)=x^2$ на множестве R мы получили производную $f'(x)=2x$. Пишут также $(x^2)'=2x$.

Пример 1. Найти производную линейной функции

$$y=kx+b.$$

Адукацыйны партал www.adu.by

Решение. Здесь $f(x) = kx + b$. Найдем Δy — приращение функции f в точке x_0:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k(x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x.$$

Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (напомним, что $\Delta x \neq 0$):

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не зависит от Δx; при любом значении Δx оно равно k. Значит, и при Δx, стремящемся к нулю, это отношение равно k. А раз так, то можно сказать, что оно стремится к k. Итак:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to k \text{ при } \Delta x \to 0,$$

т. е. $f'(x_0) = k$.

Поскольку x_0 — это произвольная точка из области определения функции, то и вообще $f'(x) = k$.

Ответ: $(kx + b)' = k$.

В частности, при $k = 0$ получаем $b' = 0$, т. е. ***производная постоянной равна нулю.***

Пример 2. Найти производную квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Здесь $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдем Δy — приращение функции в точке x_0:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$$
$$= a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c) =$$
$$= 2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x.$$

Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x}{\Delta x} = 2ax_0 + a\Delta x + b.$$

Если $\Delta x \to 0$, то $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2ax_0 + b$, т. е. $f'(x_0) = 2ax_0 + b$.

Поскольку x_0 — произвольная точка из области определения функции, то и вообще $f'(x) = 2ax + b$.

Ответ: $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$.

Решенные примеры показывают, что для вычисления производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 нужно:

1) ***найти Δy — приращение функции f в точке x_0;***

2) ***найти отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;***

3) ***найти, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю.***

Заметим, что приращение функции f можно записать и так: Δf.

Вычисление производной функции называется ***дифференцированием функции.***

Пример 3. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{4}{x}.$$

Решение. Пусть x_0 — произвольная точка из области определения функции $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

1) Выберем Δx так, чтобы выражение $f(x_0 + \Delta x)$ имело смысл, т. е. $x_0 + \Delta x \neq 0$, тогда $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{-4\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$ (см. п. 1.3, пример 1, в).

2) Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{x_0(x_0 + \Delta x)}. \quad (3)$$

3) Найдем, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю. Понятно, что

$$x_0 + \Delta x \to x_0 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Значит, знаменатель дроби в правой части равенства (3) стремится к x_0^2:

$$x_0(x_0 + \Delta x) \to x_0^2 \text{ при } \Delta x \to 0.$$

А так как числитель этой дроби равен -4 при любом значении Δx, то имеем:

$$\frac{-4}{x_0(x_0 + \Delta x)} \to \frac{-4}{x_0^2} \text{ при } \Delta x \to 0. \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{-4}{x_0^2} \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Адукацыйны партал www.adu.by

Таким образом, $\left(\frac{4}{x}\right)' = -\frac{4}{x^2}$ (поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = \frac{4}{x}$).

Ответ: $\left(\frac{4}{x}\right)' = -\frac{4}{x^2}$.

Пример 4*. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение. Пусть $x_0 > 0$.

1) Выберем Δx так, чтобы выражение $f(x_0 + \Delta x)$ имело смысл, т. е. $x_0 + \Delta x \geqslant 0$, тогда

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$ (см. п. 1.3, пример 1, г).

2) Найдем отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Найдем, к какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю. Имеем:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0} \to 2\sqrt{x_0} \text{ при } \Delta x \to 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ при } \Delta x \to 0;$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Таким образом, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции $f(x) = \sqrt{x}$).

Ответ: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ для любого $x > 0$.

Вообще функция может и не иметь производной в данной точке.

Например, в точке $x = 0$ производная функции $f(x) = \sqrt{x}$ не существует.

1. Как читается и что означает запись $\Delta x \to 0$?
2. Что называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?
3. Как обозначается производная функции $y = f(x)$?
4. Чему равна производная линейной функции $f(x) = kx + b$?
5. Чему равна производная постоянной?

6. Чему равна производная квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$?
7. Чему равна производная функции:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б)* $f(x) = \sqrt{x}$?

Упражнения

1.38°. Вычислите отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в точке x_0, если:

1) $f(x) = 4x - 6$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}5$;
2) $f(x) = 12 - 3x$, $x_0 = 4$, $\Delta x = 0{,}1$;
3) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 5$, $\Delta x = 0{,}2$;
4) $f(x) = 6x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}4$.

1.39°. К какому числу стремится отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ в точке x_0 при $\Delta x \to 0$, если:

1) $f(x) = 3x - 1$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = 0{,}5 - 5x$, $x_0 = 10$;
3) $f(x) = 2x^2 - 1$, $x_0 = 1$;
4) $f(x) = 1 - 3x^2$, $x_0 = -5$?

Пользуясь определением производной, найдите значение производной функции $y = f(x)$ в точке a **(1.40—1.46).**

1.40°. 1) $f(x) = 3$, $a = 10$;
2) $f(x) = -6$, $a = 1$;
3) $f(x) = \pi$, $a = -4$;
4) $f(x) = \sqrt{8}$, $a = -5$.

1.41°. 1) $f(x) = 4x$, $a = 1$;
2) $f(x) = -5x$, $a = 7$;
3) $f(x) = -2{,}5x - 2$, $a = -2$;
4) $f(x) = -4{,}2x + 3$, $a = -6$;
5) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$, $a = 0$;
6) $f(x) = 2 + \frac{3x}{4}$, $a = 1$.

1.42°. 1) $f(x) = 4x^2$, $a = 0$;
2) $f(x) = -7x^2$, $a = 0{,}5$;
3) $f(x) = \frac{x^2}{4} + 2$, $a = -2$;
4) $f(x) = 3 - \frac{x^2}{6}$, $a = 3$.

1.43. 1) $f(x) = x^2 + 3x - 1$, $a = 0{,}25$;
2) $f(x) = x^2 - x + 2$, $a = 0$;
3) $f(x) = \frac{x^2}{6} - 0{,}2x + 8$, $a = 3$;
4) $f(x) = \frac{4x^2}{5} - \frac{x}{10} + 1$, $a = -1$;
5) $f(x) = \frac{6x^2 - 3x + 9}{3}$, $a = -2$;
6) $f(x) = \frac{6 - 6x - 12x^2}{6}$, $a = -3$.

Адукацыйны партал www.adu.by

1.44. 1) $f(x) = (3 + x)^2$, $a = -2$;
2) $f(x) = (4 - x)^2$, $a = -1{,}5$;
3) $f(x) = x(x + 2)$, $a = 0{,}1$;
4) $f(x) = x(x - 4)$, $a = 1$;
5) $f(x) = x^2 - (x + 2)^2$, $a = -0{,}5$;
6) $f(x) = (x - 1)^2 - x^2$, $a = 2{,}5$.

1.45. 1) $f(x) = \frac{5}{x}$, $a = 0{,}1$; 2) $f(x) = -\frac{6}{x}$, $a = -0{,}1$;
3) $f(x) = -\frac{1}{x} + 1$, $a = -1$; 4) $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$, $a = -0{,}5$;
5) $f(x) = \frac{3}{x} + x^2$, $a = 5$; 6) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $a = 0{,}2$.

1.46. 1) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0{,}01$; 2) $f(x) = \sqrt{4x}$, $a = 0{,}04$;
3) $f(x) = -\sqrt{0{,}01x}$, $a = 100$; 4) $f(x) = \sqrt{9x} + 1$, $a = 1$.

1.47. Функция $y = f(x)$ — линейная или квадратичная. Используя изображение ее графика на рисунке 31, изобразите график производной $y = f'(x)$.

1.48*. Решите уравнение $f'(x) = 0$:
1) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x$; 2) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x$;
3) $f(x) = (x - 4)^2$; 4) $f(x) = (2 - x)^2 - 4$.

1.49*. Решите неравенство $f'(x) \leqslant 0$:
1) $f(x) = 5x^2 + x + 2$; 2) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{4} + 1$;
5) $f(x) = \frac{2}{1+x}$; 6) $f(x) = \frac{5}{x-2}$.

1.50. Укажите точки из области определения функции f, в которых производная функции f не существует, если:
1) $f(x) = \sqrt{x + 2}$; 2) $f(x) = -\sqrt{x - 6}$;
3) $f(x) = 4\sqrt{8 + x}$; 4) $f(x) = 9 + \sqrt{x + 1}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

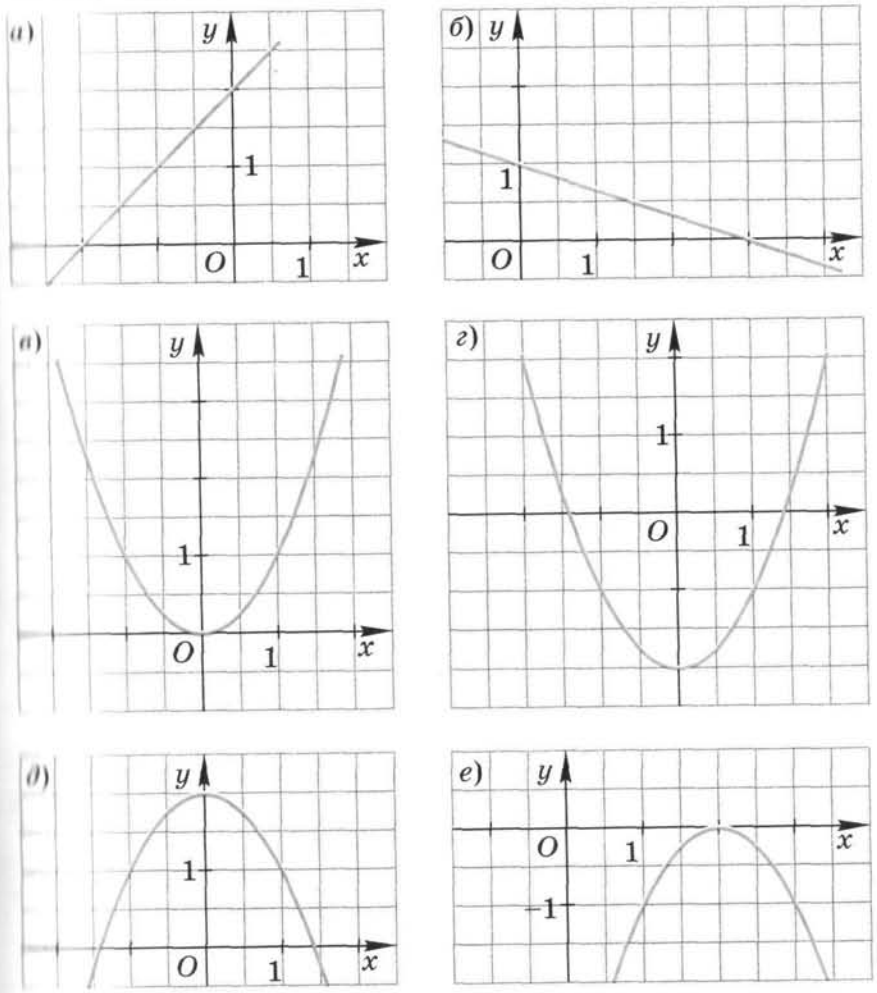


Рис. 31

1.51. Задайте функцию формулой, если производная этой функции равна:
1) 2; 2) -6;
3) $2x$; 4) $-x$;
5) $x + 1$; 6) $x - 2$;
7) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$; 8) $4 - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

1.5. Механический смысл производной

Будем рассматривать прямолинейное движение тела. Каждому моменту времени t поставим в соответствие путь $s(t)$, пройденный телом за время t. Тогда путь, пройденный телом за отрезок времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, равен $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \Delta s$. А время, за которое пройден этот путь, равно Δt.

Средняя скорость тела на отрезке времени $[t_0; t_0 + \Delta t]$ определяется как отношение пройденного пути Δs ко времени Δt, за которое этот путь пройден:

$$v_{ср} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Когда промежуток времени Δt стремится к нулю, то значение средней скорости $v_{ср}$ стремится к некоторому числу. Это число считается значением скорости в момент времени t_0 (в механике ее называют мгновенной скоростью) и обозначается $v(t_0)$:

$$v_{ср} \to v(t_0) \text{ при } \Delta t \to 0.$$

А по определению производной функции $s(t)$ в точке t_0 имеем:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \to s'(t_0) \text{ при } \Delta t \to 0.$$

Таким образом, при Δt, стремящемся к нулю, левая часть равенства (1) стремится к $v(t_0)$, а правая — к $s'(t_0)$. Значит,

$$v(t_0) = s'(t_0). \qquad (2)$$

В равенстве (2) и заключается ***механический*** (говорят еще физический) ***смысл производной***.
Его обычно формулируют так: *скорость есть производная от пройденного пути по времени.*

Пример 1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Чему равна его скорость в момент времени t_0?

Решение. Закон движения тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, задается формулой

$$h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Используя механический смысл производной и формулу производной квадратичной функции (см. п. 1.4), получаем:

$$v(t_0) = h'(t_0) = v_0 - gt_0.$$

Ответ: $v(t_0) = v_0 - gt_0$.

Пример 2. Известно, что закон движения тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 70$ $\frac{м}{с}$, задается формулой $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. Какую скорость будет иметь тело на высоте 240 м от поверхности Земли?

Решение. Используя механический смысл производной и формулу производной квадратичной функции (см. п. 1.4), находим:

$$v(t_0) = h'(t_0) = v_0 - gt_0 = 70 - 10t_0.$$

Поскольку $h(t_0) = 240$, то имеем уравнение

$$240 = 70t_0 - \frac{10t_0^2}{2}, \text{ т. е. } 5t_0^2 - 14t_0 + 48 = 0.$$

Решая его, находим: $t_0 = 6$ или $t_0 = 8$.

При $t_0 = 6$ получим $v(6) = 70 - 10 \cdot 6 = 10$, а при $t_0 = 8$ получим $v(8) = 70 - 10 \cdot 8 = -10$.

Таким образом, на высоте 240 м от поверхности Земли тело будет иметь скорость 10 $\frac{м}{с}$. Знак «минус» показывает, что на 8-й секунде тело будет уже падать вниз, а на 6-й секунде — еще лететь вверх.

Ответ: 10 $\frac{м}{с}$.

Уже в первой половине XVII в. французский математик Пьер Ферма умел находить производные от простейших функций — многочленов. Но систематическое использование производных при решении различных задач физики и математики началось с создания математического анализа Исааком Ньютоном и Готфридом Вильгельмом Лейбницем. В книге Ньютона «Математические начала натуральной философии» доказаны основные законы движения небесных тел. В своих трудах «Рассуждения о квадратуре кривых» и «Метод флюксии и бесконечных рядов» Ньютон разработал основы математического анализа, дал решение таких вопросов, как нахождение экстремумов функций, точек перегиба, уравнений касательных к кривым, вычисление длин кривых, площадей, ограниченных кривыми, и дал методы решения простейших дифференциальных уравнений.

укацыйны партал www.adu.by

1. Как определяется средняя скорость тела на отрезке времени $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$?
2. В чем заключается механический (физический) смысл производной?

Упражнения

1.52°. По графику (рис. 32) найдите среднюю скорость движения мотоциклиста на отрезке времени:

1) [0; 2]; 2) [2; 5];
3) [2; 6]; 4) [5; 9].

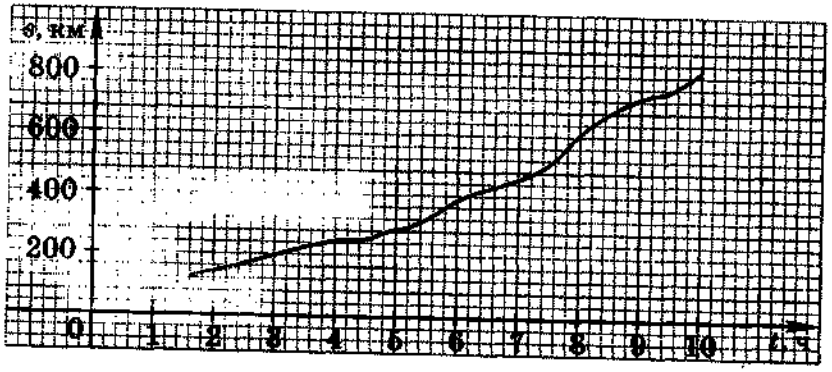


Рис. 32

1.53. На отрезке времени $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$ найдите среднюю скорость тела, движущегося прямолинейно по закону:

1) $s(t) = 12t + 9$; 2) $s(t) = 5 - 4t$;
3) $s(t) = t^2 + 1$; 4) $s(t) = 6 - t^2$.

1.54°. Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = 2t^2 - 8t - 9$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Вычислите скорость движения точки в момент времени:

1) $t = 5$ с; 2) $t = 12$ с; 3) t с.

1.55°. Движение точки происходит по закону $s(t) = t^2 + 4t + 2$. В какой момент времени скорость движения точки равна:

1) 6; 2) 0; 3) 12?

1.56. Найдите скорость в указанный момент времени t точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)$:

1) $s(t) = t^2 + 2t + 1$, $t = 3$; 2) $s(t) = 2t^2 - 3t + 4$, $t = 2$.

1.57. Маховик вращается вокруг оси по закону $\varphi = t^2 - 1$ (φ — угол вращения в радианах, t — время в секундах). Найдите угловую скорость вращения маховика ω в момент времени:

1) t с; 2) 2 с; 3) 8 с.

1.58. Путь, пройденный клетью подъемной машины, определяется из уравнения $s = 6 + 8t$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Укажите скорость движения клети в любой момент времени t.

1.59. 1) Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1 = 2{,}5t^2 - 6t + 1$ и $s_2 = 3{,}5t^2 + t - 12$ (t — время в секундах, s — путь в метрах). В какой момент времени их скорости равны?

2) Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1 = \frac{3t^2}{2} + 5t - 13$ и $s_2 = 1 - 7t - 4t^2$ (t — время в секундах, s — путь в метрах). В какой момент времени их скорости равны?

1.60. 1) Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1 = t^2 - 8t + 4$ и $s_2 = 5t^2 - 4t - 9$ (t — время в секундах, s — путь в метрах). В какой момент времени скорость первой точки в три раза больше скорости второй?

2) Две материальные точки движутся прямолинейно по законам $s_1 = 9t - 7$ и $s_2 = 0{,}5t^2 + 8t + 1$ (t — время в секундах, s — путь в метрах). В какой момент времени скорость первой точки в два раза меньше скорости второй?

1.61. Температура тела в зависимости от времени задается формулой $T = 0{,}3t^2$ (T — температура в градусах, t — время в секундах). С какой скоростью изменяется температура тела в момент времени:

1) $t = 5$; 2) $t = 4$; 3) $t = 1$?

1.62. 1) Тело брошено вертикально вверх и движется по закону $h(t) = 4 + 8t - 5t^2$ (м). Найдите скорость тела в момент соприкосновения с поверхностью Земли. (Ускорение g считать равным 10 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.)

дукацыйны партал www.adu.by

2) Тело брошено вертикально вверх и движется по закону $h(t) = 6 + 7t - 5t^2$ (м). Найдите скорость тела в момент соприкосновения с поверхностью Земли. (Ускорение g считать равным 10 $\frac{м}{с^2}$.)

1.63*. Тело брошено вертикально вверх с высоты 20 м от поверхности Земли с начальной скоростью 50 $\frac{м}{с}$. (Ускорение g считать равным 10 $\frac{м}{с^2}$.)

1) В какой момент времени скорость брошенного тела будет равной нулю?

2) Найдите высоту тела над поверхностью Земли в момент времени, рассмотренный в задании 1.

1.64. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнением $I = 4t^2 - 9t$ (I — в амперах, t — в секундах). Найдите скорость изменения силы тока в момент времени $t = 10$ с.

1.65. Известно, что тело массой $m = 6$ кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 3t^2 - 14$ (t — время в секундах, s — путь в метрах). Найдите кинетическую энергию тела через 4 с после начала движения.

1.66. 1) Тело массой $m = 4$ кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 4t^2 - 5t - 1$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Найдите скорость тела и его кинетическую энергию через 4 с после начала движения. Какая сила действует на тело в этот момент времени?

2) Тело массой $m = 1$ кг движется прямолинейно по закону $s(t) = 2 + 6t - 2t^2$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Найдите скорость тела и его кинетическую энергию через 3 с после начала движения. Какая сила действует на тело в этот момент времени?

1.67. 1) Точка движется по параболе $y = 16x - x^2$ так, что ее абсцисса изменяется по закону $x = 2\sqrt{t}$ (x — путь в метрах, t — время в секундах). Укажите скорость изменения ординаты точки через 8 с после начала движения.

2) Точка движется по параболе $y = 4x^2 + 2$ так, что ее абсцисса изменяется по закону $x = 0{,}5\sqrt{t}$ (x — путь в метрах, t — время в секундах). Укажите скорость изменения ординаты точки через 2 с после начала движения.

1.6. Геометрический смысл производной

Мы знаем, что касательная к окружности — это прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку. Но такое определение касательной годится далеко не для всякой прямой. Например, и ось Oy, и ось Ox имеют единственную общую точку (начало координат) с параболой $y = x^2$, но ось Ox является касательной к параболе, а ось Oy не является к ней касательной (рис. 33, *а*). А прямая AB касается кривой в точке M (рис. 33, *б*), но имеет с этой кривой не одну, а две общие точки.

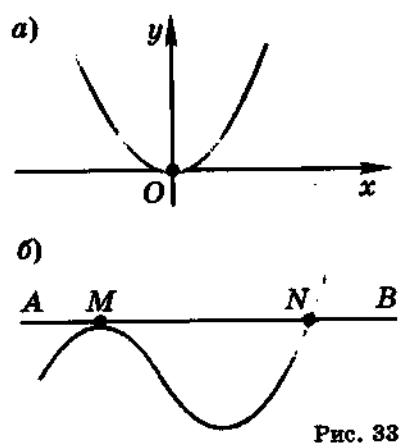


Рис. 33

Чтобы дать определение касательной к данной кривой в точке P_0 (рис. 34), возьмем на этой кривой еще одну точку P и проведем секущую P_0P. Будем перемещать точку P по кривой, приближая ее неограниченно к точке P_0. Тогда секущая P_0P будет поворачиваться вокруг точки P_0. Если при этом секущая будет стремиться к некоторому предельному положению — пря-

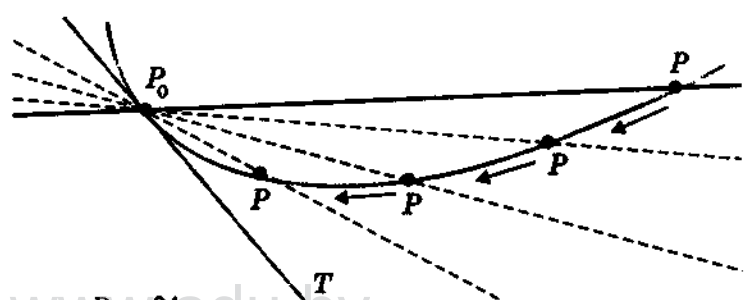


Рис. 34

укацыйны партал www.adu.by

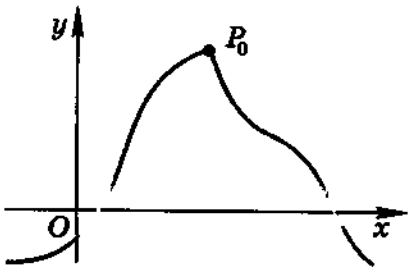


Рис. 35

мой P_0T, то эта прямая P_0T и называется ***касательной к кривой в точке P_0***.

Заметим, что в точке P_0 кривая может и не иметь касательной (рис. 35).

Пусть теперь рассматриваемая кривая (рис. 36) является графиком некоторой функции $y = f(x)$. Решим задачу: *найти угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке* $P_0(x_0; f(x_0))$.

Угол наклона касательной P_0T к оси Ox обозначим φ. Возьмем на кривой еще одну точку $P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ и проведем секущую P_0P. Угол наклона секущей к оси Ox обозначим α (рис. 36). Из треугольника P_0PK ($\angle K = 90°$) видно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{PK}{P_0K}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Когда Δx стремится к нулю, точка P, двигаясь по кривой, неограниченно приближается к точке P_0. При этом секущая P_0P, поворачиваясь вокруг точки P_0, стремится занять положение касательной P_0T. Но тогда величина угла α стремится к величине угла φ. Следовательно, и $\operatorname{tg}\alpha$ стремится к $\operatorname{tg}\varphi$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha \to \operatorname{tg}\varphi \text{ при } \Delta x \to 0.$$

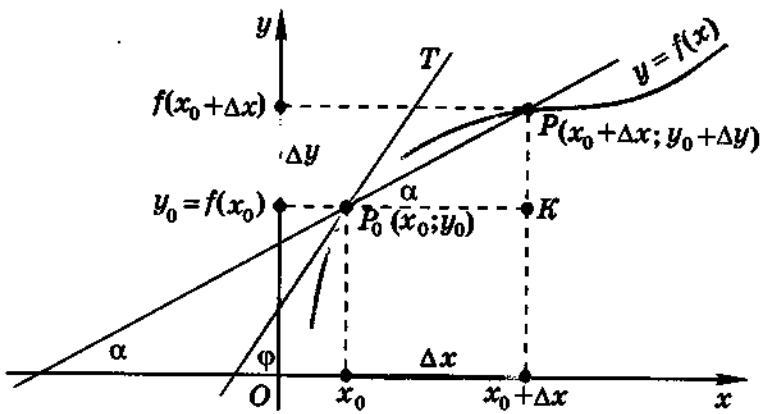


Рис. 36

А по определению производной функции $f(x)$ в точке x_0 имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Таким образом, при Δx, стремящемся к нулю, левая часть равенства (1) стремится к $\operatorname{tg}\varphi$, а правая — к $f'(x_0)$. Значит,

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0). \qquad (2)$$

Заметим, что $\operatorname{tg}\varphi$ — это угловой коэффициент касательной.

В равенстве (2) и заключается ***геометрический смысл производной***. Его формулируют так:
угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен производной этой функции в точке x_0.
Иными словами:
производная функции в точке с абсциссой x_0 есть тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику этой функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

Пример 1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$?

Решение. Обозначим угловой коэффициент касательной буквой k. Тогда, использовав геометрический смысл производной и формулу производной квадратичной функции (см. п. 1.4), получим:

$$k = f'(x_0) = 2 \cdot \frac{1}{4} x_0 = \frac{1}{2} x_0.$$

Так как $x_0 = 2$, то $k = 1$.

Ответ: 1.

▲ **Пример 2.** Записать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{4}x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Угловой коэффициент касательной k мы нашли в предыдущем примере: $k = 1$.

Найдем ординату y_0 точки касания:

$$y_0 = \frac{1}{4}x_0^2 + 2 = 3.$$

укацыйны партал

Остается воспользоваться формулой из п. 1.2 для уравнения прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Подставляя в эту формулу значения k, x_0 и y_0, получаем:

$$y - 3 = 1(x - 2), \text{ т. е. } y = x + 1.$$

Ответ: $y = x + 1$.

Аналогичными рассуждениями можно получить уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

(Убедитесь в этом самостоятельно.) ▲

а Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) — великий немецкий ученый. Его творчество было чрезвычайно многогранным: он был дипломатом, занимался философией, юриспруденцией, математикой.

Свои открытия в области математического анализа Лейбниц опубликовал в двух работах: «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных...» и «О скрытой геометрии и анализе неделимых и бесконечных». В этих работах в математику введены термины и обозначения, которыми мы пользуемся до сих пор: абсцисса, ордината, координата, функция, производная, алгоритм, дифференциал, дифференциальное исчисление и т. д.

?

1. Что такое касательная к кривой в точке P_0?
2. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0?
3. В чем заключается геометрический смысл производной?
4*. Как получить уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0?

Упражнения

1.68. Изобразите график функции $y = (x - 2)^2 + 4$ и проведите к нему касательную в точке с абсциссой, равной:

1) 0; 2) 2.

Укажите знак углового коэффициента касательной.

1.69. Изобразите график функции $y = \frac{1}{x-1} + 1$ и проведите к нему касательную (если она существует) в точке с абсциссой, равной:

1) –1; 2) 0.

Укажите знак углового коэффициента касательной.

1.70. По рисунку 37 определите знак углового коэффициента каждой из касательных, проведенных к графику функции в точках с абсциссами x_1, x_2, x_3, если эта касательная существует.

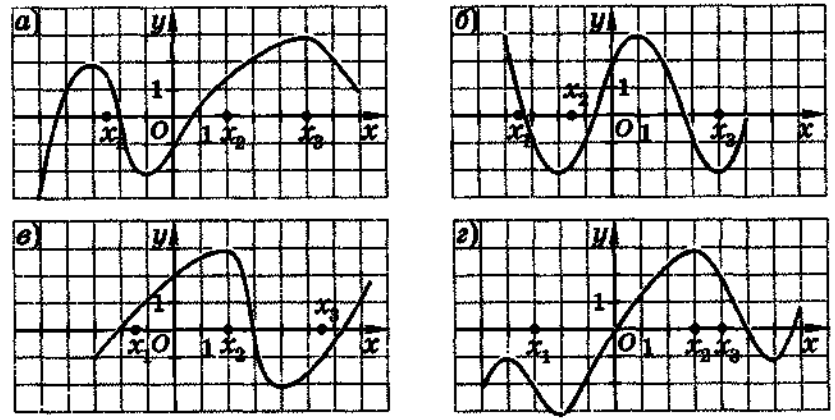


Рис. 37

1.71. 1) Найдите значение производной функции $y = x^2 + 2$ в точке $x = -1$.

2) Чему равен $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона, образованный касательной, проведенной к графику функции $y = x^2 + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$, с осью Ox?

3) Известно, что угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен 0,42. Найдите значение производной функции в этой точке.

4) Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 образует с осью Ox угол наклона 45°. Найдите $f'(x_0)$.

Адукацыйны партал www.adu.by

1.72. Найдите тангенс угла наклона, образованного касательной, проведенной к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой x_0, с осью Ox, если:

1) $f(x)=4x^2-6x$, $x_0=2$;
2) $f(x)=x^2-2x$, $x_0=3$;
3) $f(x)=3x^2-8x+7$, $x_0=1$;
4) $f(x)=3x-4x^2+20$, $x_0=-2$.

1.73. Какой угол наклона (острый или тупой) образует с осью Ox касательная, проведенная к графику функции:

1) $y=(x-4)^2$ в каждой из точек с абсциссами 0; 8; –5;
2) $y=-(x-1)^2$ в каждой из точек с абсциссами 0; 1; 2?

1.74*. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0, если:

1) $f(x)=x^2+1$, $x_0=2$; 2) $f(x)=x^2-1$, $x_0=3$;
3) $f(x)=\frac{2}{x}$, $x_0=-2$; 4) $f(x)=-\frac{1}{x}$, $x_0=-1$.

1.75*. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке P. Изобразите график этой функции и касательную к нему в точке P, если:

1) $f(x)=x^2+3x+4$, $P(1; 8)$;
2) $f(x)=x^2-2x+5$, $P(2; 5)$;
3) $f(x)=4x-2x^2$, $P(1; 2)$;
4) $f(x)=3x-x^2$, $P(0; 0)$.

1.76*. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке M. Изобразите график функции f и касательную к нему в точке M, если:

1) $f(x)=x^2+5$, $M(-1; 6)$;
2) $f(x)=x^2-3$, $M(-2; 1)$;
3) $f(x)=(x-3)^2$, $M(2; 1)$;
4) $f(x)=(5-x)^2$, $M(6; 1)$;
5) $f(x)=(x+4)^2-7$, $M(-4; -7)$;
6) $f(x)=(x+1)^2+2$, $M(-3; 6)$.

1.77*. 1) Найдите точку пересечения касательных к графику функции $f(x)=x^2-4x+3$, одна из которых касается графика в точке с абсциссой, равной 3, а другая — в точке с абсциссой, равной 1.

2) Найдите точку пересечения касательных к графику функции $f(x)=8-x^2-2x$, одна из которых касается графика в точке с абсциссой, равной 2, а другая — в точке с абсциссой, равной –4.

1.78. 1) Составьте уравнение касательной, параллельной оси абсцисс, к графику функции $f(x)=3x-x^2$.

2) Составьте уравнение касательной, перпендикулярной оси ординат, к графику функции $f(x)=x^2+4x$.

1.79. В какой точке графика функции $y=f(x)$ касательная, проведенная к нему, наклонена к оси абсцисс под углом α, если:

1) $f(x)=x^2+4x+3$, $\alpha=45°$;
2) $f(x)=-4x^2+3x+2$, $\alpha=45°$;
3) $f(x)=1+2x^2+\sqrt{3}x$, $\alpha=60°$;
4) $f(x)=-3x^2+2\sqrt{3}x+6$, $\alpha=60°$;
5) $f(x)=\sqrt{x}$, $\alpha=60°$;
6) $f(x)=\sqrt{x}$, $\alpha=30°$?

1.80*. 1) Касательная к кривой $y=5x^2-4x+3$ параллельна прямой $y=6x+13$. Найдите координаты точки касания.

2) Касательная к кривой $y=2x^2+x-1\frac{7}{8}$ параллельна прямой $y=-4x+5$. Найдите координаты точки касания.

1.81*. 1) К графику функции $f(x)=2x^2-8x+1$ проведена касательная, параллельная оси абсцисс. Найдите координаты точки касания.

2) В какой точке графика функции $f(x)=-x^2+4x-3$ касательная к нему параллельна оси абсцисс?

1.82*. 1) Составьте уравнения всех касательных к графику функции $y=-x^2$, проходящих через точку $M(1; 0)$.

2) Составьте уравнения всех касательных к графику функции $y=x^2-3x+1$, проходящих через точку $K(2; -2)$.

Акацыйны партал www.adu.by

1.83*. 1) Найдите точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $y = x^2 - 5x + 9$ в его точках с абсциссами 4 и -4.

2) Найдите точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $y = x^2 + 7 - 4x$ в его точках с абсциссами 3 и -3.

1.84*. 1) При каких значениях a прямая $y = 3x - 2$ является касательной к графику функции $y = x^2 + ax + 2$?

2) При каком значении a прямая $y = 3x + a$ является касательной к графику функции $y = 2x^2 - 5x + 1$?

1.7. Теоремы о вычислении производных

Функции u и v, которые рассматриваются в этом пункте, имеют производные на некотором промежутке, x_0 — точка из этого промежутка. Мы выведем правила вычисления производной суммы, произведения, частного функций u и v.

Теорема 1 (*о производной суммы*).

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Эта теорема кратко формулируется так: *производная суммы равна сумме производных слагаемых.*

▲**Доказательство.** 1) Пусть $y = u + v$. Это значит, что $y(x) = u(x) + v(x)$. Найдем приращение функции $y(x)$ в точке x_0:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) -$$
$$- (u(x_0) + v(x_0)) = (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) =$$

заметим, что $u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) = \Delta u$, $v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) = \Delta v$

$$= \Delta u + \Delta v, \text{ т. е. } \Delta y = \Delta u + \Delta v.$$

2) Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

3) Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'; \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'; \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'; \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \to u' + v'.$$

Итак, левая часть равенства $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$ стремится к y', а правая — к $u' + v'$.

Значит, $y' = u' + v'$. ☒ ▲

Теорема 2 (*о производной произведения*).

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

▲**Доказательство.** 1) Пусть $y = uv$. Это значит, что $y(x) = u(x)\,v(x)$. Найдем приращение функции $y(x)$ в точке x_0:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)\,v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)\,v(x_0) =$$
$$= (u(x_0) + \Delta u)(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0)\,v(x_0) =$$
$$= u(x_0)\,v(x_0) + \Delta u v(x_0) + u(x_0)\,\Delta v + \Delta u \Delta v - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

Таким образом,

$$\Delta y = \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v.$$

2) Найдем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\,v(x_0) + u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v. \qquad (1)$$

3) Пусть $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to y'; \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'; \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'; \quad \Delta v \to 0.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}\,v(x_0) + u(x_0)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta v \to$$
$$\to u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0) + v'(x_0) \cdot 0.$$

Правая часть равенства (1) стремится к $u'v + uv'$, а левая — к y'. Значит,

$$y' = u'v + uv'.$$

А так как $y = uv$, то

$$(uv)' = u'v + uv'. \ ☒ ▲$$

Теорема 3 (*о вынесении постоянной за знак производной*).

$$(cu)' = cu'.$$

Акацыйны партал www.adu.by

Эта теорема формулируется так: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

▲ Доказательство проведите самостоятельно, воспользовавшись теоремой 2 и тем, что $c' = 0$ (см. п. 1.4). ▲

Теорема 4 (*о производной частного*).

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

▲ **Доказательство.** Обозначим $y = \frac{u}{v}$. Тогда $u = yv$, и по теореме 2 получим

$$u' = y'v + yv'.$$

Выразим из этой формулы y', а затем вместо y подставим $\frac{u}{v}$:

$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \cdot v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

А так как $y = \frac{u}{v}$, то

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \ \boxtimes \ ▲$$

Теоремы 1—4 называются *правилами дифференцирования.*

Пример 1. Найти производную функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Воспользуемся теоремами 1 и 3:

$$f'(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)' = \left(ax^2\right)' + (bx)' + c' = a\left(x^2\right)' + bx' + c' =$$

↓ зная, что $\left(x^2\right)' = 2x$, $x' = 1$, $c' = 0$, получим ↓

$$= a \cdot 2x + b \cdot 1 + 0 = 2ax + b.$$

Ответ: $f'(x) = 2ax + b$.

Пример 2. Найти производную функции:

а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = x^4$.

Решение. а) Зная, что $x' = 1$, $\left(x^2\right)' = 2x$, и используя теорему 2, получаем:

$$f'(x) = \left(x^3\right)' = \left(x \cdot x^2\right)' = x' \cdot x^2 + x \cdot \left(x^2\right)' =$$
$$= 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2.$$

б) $f'(x) = \left(x^4\right)' = \left(x \cdot x^3\right)' = x' \cdot x^3 + x \cdot \left(x^3\right)' = 1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 =$
$= x^3 + 3x^3 = 4x^3$.

Ответ: а) $f'(x) = 3x^2$; б) $f'(x) = 4x^3$.

Пример 3. Найти производную функции:

а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Решение. Используя теорему о производной частного и известные нам формулы для вычисления производных, получаем:

а) $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$;

б) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = \frac{1' \cdot x^3 - 1 \cdot \left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2} = \frac{-3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$.

Ответ: а) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$; б) $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

Рассматривая результаты, полученные при решении примеров 2 и 3, легко заметить, что для любого натурального n верны формулы:

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}; \qquad \left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1}.$$

Эту закономерность можно сформулировать и по-иному.

Теорема 5 (*о производной степени*). Для любого целого k верна формула

$$\left(x^k\right)' = kx^{k-1}.$$

Пример 4. Найти производную функции:

а) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 5x - 3$;

б) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$;

в) $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$.

Решение. а) $f'(x) = \left(2x^4 - x^3 + 5x - 3\right)' = \left(2x^4\right)' + \left(-x^3\right)' + \left(5x\right)' +$
$+ (-3)' = 2\left(x^4\right)' - \left(x^3\right)' + 5x' + 0 =$

↓ воспользуемся теоремой 5 ↓

$$= 2 \cdot 4x^3 - 3x^2 + 5 = 8x^3 - 3x^2 + 5.$$

б) $f'(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)' = \left(x^2\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)' = 2x + \frac{2}{x^3}$.

А укацыйны партал www.adu.by

в) $f'(x)=\left(\frac{x^3-3x}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^3-3x)'(x^2-1)-(x^3-3x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=$

$=\frac{(3x^2-3)(x^2-1)-(x^3-3x)2x}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-3x^2+3-2x^4+6x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{x^4+3}{(x^2-1)^2}.$

Ответ: а) $8x^3-3x^2+5$; б) $2x+\frac{2}{x^3}$; в) $\frac{x^4+3}{(x^2-1)^2}$.

1. Сформулируйте теорему о производной суммы.
2. Сформулируйте теорему о производной произведения.
3. Сформулируйте теорему о вынесении постоянной за знак производной.
4. Сформулируйте теорему о производной частного.
5. Сформулируйте теорему о производной степени.

Упражнения

Найдите производную функции f (1.85—1.92).

1.85°. 1) $f(x)=x^4$; 2) $f(x)=x^9$; 3) $f(x)=x^{-5}$;

4) $f(x)=x^{-7}$; 5) $f(x)=\frac{1}{x^6}$; 6) $f(x)=\frac{1}{x^{12}}$.

1.86°. 1) $f(x)=3x^3-2x^2+1$;

2) $f(x)=2x^3-3x+7$;

3) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2-2x+3$;

4) $f(x)=0{,}5x^4-\frac{5}{3}x^3-1{,}5x^2+6$.

1.87°. 1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+\frac{x}{4}$; 2) $f(x)=\sqrt{x}-x^4+\frac{2}{7}x^7$;

3) $f(x)=\frac{1}{x^3}+2\sqrt{x}-\sqrt{12}$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^{10}}-4\sqrt{x}+\sqrt{5}$.

1.88. 1) $f(x)=\left(\sqrt{x}-4\right)^2$; 2) $f(x)=\left(1-\sqrt{x}\right)^2$;

3) $f(x)=\left(\sqrt{x}+2\right)^2+\frac{2}{x^2}$; 4) $f(x)=\left(4-\sqrt{x}\right)^2-\frac{4}{x^4}$;

5) $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2+x^{-10}+19$; 6) $f(x)=\left(\sqrt{x+5}\right)^2-x^{-3}+\pi$.

1.89°. 1) $f(x)=\frac{1}{x}+x$; 2) $f(x)=\frac{4}{x}+x$;

3) $f(x)=-\frac{1}{x}+4x$; 4) $f(x)=-9x-\frac{1}{x}$.

1.90. 1) $f(x)=(x^2+2x)(x+3)$;

2) $f(x)=(x^2-5x)(x-4)$;

3) $f(x)=(x^2-x+1)(x^2+x-1)$;

4) $f(x)=\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)(x^4-4x^3)$.

1.91. 1) $f(x)=\frac{3x+1}{x+1}$; 2) $f(x)=\frac{3x-2}{x-1}$;

3) $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x}$; 4) $f(x)=\frac{2x^2-3x-1}{x+2}$.

1.92. 1) $f(x)=\frac{x-1}{2+x^2}$; 2) $f(x)=\frac{4x-7}{4+x^2}$;

3) $f(x)=\frac{x^2+4}{2-x}$; 4) $f(x)=\frac{1+x}{4-x^2}$;

5) $f(x)=\frac{x^2-3x+1}{5+x^2-2x}$; 6) $f(x)=\frac{x^2-8x+4}{1-x^2+x}$.

1.93. Верно ли, что:

1) $f'(0)<g'(0)$, если $f(x)=x^2-6x$ и $g(x)=x^2\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}\right)$;

2) $f'(0)>g'(0)$, если $f(x)=x^2+3x$ и $g(x)=x^2\left(\frac{1}{5}x+\frac{5}{2}\right)$?

1.94. Найдите значения производных функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=a$, если:

1) $f(x)=5x^4+3x^3-15x$, $g(x)=\frac{3-x}{2+x}$, $a=0$;

2) $f(x)=x^4-3x^3+2x^2$, $g(x)=\frac{3+x}{2-x}$, $a=0$;

3) $f(x)=\frac{x^2}{1+6x}$, $g(x)=\frac{15}{x^2}$, $a=1$;

4) $f(x)=5x^2\sqrt{x}$, $g(x)=\frac{2\sqrt{x}}{2-x}$, $a=9$.

1.95. Решите уравнение $f'(x)=0$, если:

1) $f(x)=2x^3-6x+14$; 2) $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$;

3) $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$; 4) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x-1}$;

5) $f(x)=\sqrt{x}(x-2)$; 6) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

укацыйны партал www.adu.by

1.96*. Решите уравнение:

1) $f'(x) - f(x) = 0$, если $f(x) = x^3$;
2) $g'(x) + g(x) = 0$, если $g(x) = -x^3$;
3) $f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = x^2 + 4$ и $g(x) = (x+1)(4x-3)$;
4) $f'(x) - g'(x) = 0$, если $f(x) = x^2 - 3$ и $g(x) = (x-2)(3x+2)$.

1.97*. Решите неравенство:

1) $f'(x) < g'(x)$, если $f(x) = 5x + 3$ и $g(x) = 2x\left(x + \frac{1}{2}\right)$;

2) $f'(x) > g'(x)$, если $g(x) = 4x - 5$ и $f(x) = \frac{x}{2}(2 - 6x)$.

1.98. 1) При каких значениях x производная функции $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x}$ отрицательна?

2) При каких значениях x производная функции $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x}$ отрицательна?

1.99. В каких точках графика функции $y = f(x)$ касательная, проведенная к этому графику, наклонена к оси абсцисс под углом α, если:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x^3 - 3\sqrt{3}x + \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$;

2) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^3 + \frac{4}{\sqrt{3}}x + 1$, $\alpha = 30°$?

1.100*. 1) Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{2t+1}{t+1}$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Докажите, что скорость движения этой точки не превосходит 1 $\frac{м}{с}$.

2) Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{3t+1}{t+2}$ (s — путь в метрах, t — время в секундах). Докажите, что скорость движения этой точки не превосходит 2 $\frac{м}{с}$.

1.8. Возрастание и убывание функции

С помощью производной изучаются различные свойства функций. Покажем, как она используется для нахождения промежутков возрастания и убывания. Сначала сформулируем признак возрастания и признак убывания функции.

1. Если в каждой точке x некоторого промежутка $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на этом промежутке.

2. Если в каждой точке x некоторого промежутка $f'(x) < 0$, то функция f убывает на этом промежутке.

▲ Дадим наглядное геометрическое истолкование признака возрастания функции.

Пусть a и b ($a < b$) — две точки из промежутка, на котором $f'(x) > 0$. Через точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$ проведем прямую (рис. 38). Ее угловой коэффициент $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

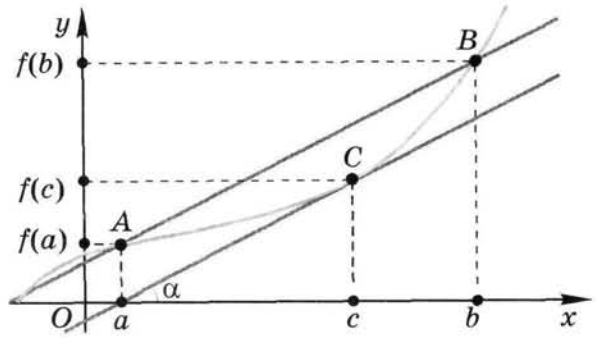


Рис. 38

На дуге AB найдется такая точка $C(c; f(c))$, что касательная к графику функции в этой точке параллельна прямой AB. Угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(c)$ (см. п. 1.6). Следовательно,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Так как $f'(c) > 0$ и $b - a > 0$, то $f(b) - f(a) > 0$.

Таким образом, когда a и b — такие точки из промежутка, что $b > a$, то $f(b) > f(a)$. А это означает, что функция f возрастает на промежутке.

Признак убывания функции проиллюстрируйте самостоятельно. ▲

Пример 1. Доказать, что функция

$$f(x) = 5x^3 - x^2 + 6x - 7$$

возрастающая.

Доказательство. Область определения функции f — множество всех действительных чисел, т. е. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

А укацыйны партал www.adu.by

Найдем производную функции:

$$f'(x) = \left(5x^3 - x^2 + 6x - 7\right)' = 15x^2 - 2x + 6.$$

Дискриминант полученного квадратного трехчлена $D = 4 - 4 \cdot 15 \cdot 6 < 0$, значит, при любых значениях x значения $f'(x) > 0$ (поясните почему).

Таким образом, функция f — возрастающая на всей области определения. ☒

▲ **Пример 2.** Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{9}{x} - 6x - x^3$$

убывающая на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Доказательство. Заметим, что $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Найдем производную функции f:

$$f'(x) = \left(\frac{9}{x} - 6x - x^3\right)' = -\frac{9}{x^2} - 6 - 3x^2 = -\frac{3(x^4 + 2x^2 + 3)}{x^2}.$$

Очевидно, что $f'(x) < 0$ для любого $x \neq 0$, т. е. значения производной отрицательны во всей области определения функции f. Согласно признаку убывания функция f убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. ☒

Поскольку $f(-1) = -9 + 6 + 1 < 0$ и $f(1) = 9 - 6 - 1 > 0$, то $f(-1) < f(1)$. Следовательно, функцию f нельзя назвать убывающей во всей области определения. ▲

Пример 3. Найти промежутки возрастания и промежутки убывания функции

$$f(x) = x^3 - 3x - 2.$$

Решение. Найдем производную функции f:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1).$$

Производная равна нулю в точках $x = -1$ и $x = 1$.

На рисунке 39 отмечены промежутки знакопостоянства функции $f'(x)$ (эти промежутки отмечены знаками «плюс» и «минус» над координатной прямой Ox; поясните, как они получены).

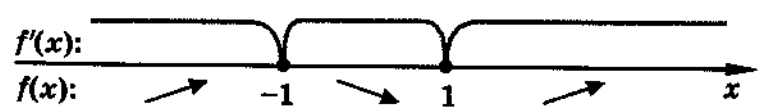


Рис. 39

Поскольку $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, то на каждом из этих интервалов функция f возрастает; поскольку $f'(x) < 0$ на интервале $(-1; 1)$, то на этом интервале функция f убывает (возрастание и убывание функции $f(x)$ показано условно стрелками под координатной прямой Ox на рисунке 39).

В точках -1 и 1 функция f определена, поэтому их включают в промежутки и возрастания, и убывания.

Ответ: $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$ — промежутки возрастания функции f; $[-1; 1]$ — промежуток убывания функции f.

Таким образом, чтобы найти промежутки возрастания и убывания функции f, надо:

а) ***найти производную*** $f'(x)$;

б) ***найти, в каких точках производная равна нулю*** (***для чего решить уравнение*** $f'(x) = 0$);

в) ***найти промежутки знакопостоянства функции*** $f'(x)$ (***каждый из них совпадает с промежутком возрастания или убывания функции*** $f(x)$).

1. Сформулируйте признак возрастания функции на промежутке.
2. Сформулируйте признак убывания функции на промежутке.
3. Как установить:
   а) промежутки возрастания функции $f(x)$;
   б) промежутки убывания функции $f(x)$?

Упражнения

1.101°. Функция задана графиком (рис. 40). Назовите промежутки, на которых:

1) функция возрастает;
2) функция убывает;
3) значения производной этой функции положительны;
4) значения производной этой функции отрицательны.

Акацыйны партал www.adu.by

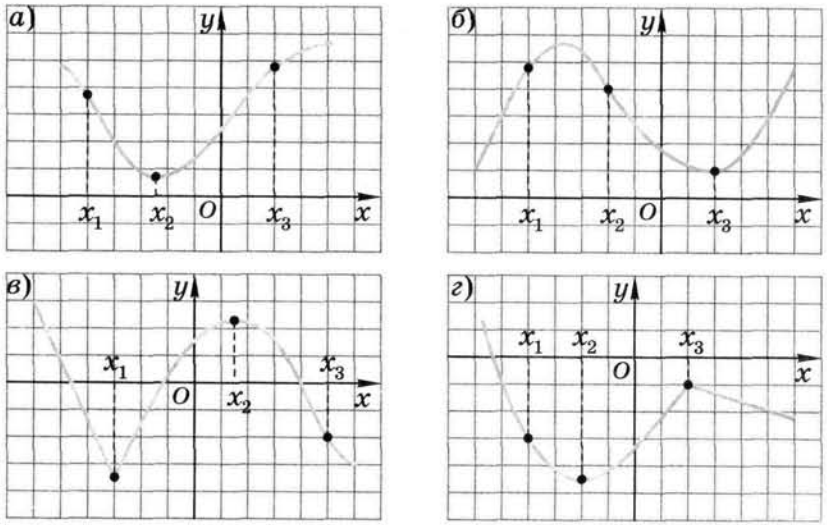


Рис. 40

1.102°. Знаки значений производной $f'(x)$ меняются по схеме (рис. 41). На каких промежутках функция f возрастает, а на каких — убывает, если известно, что она определена на всей числовой прямой?

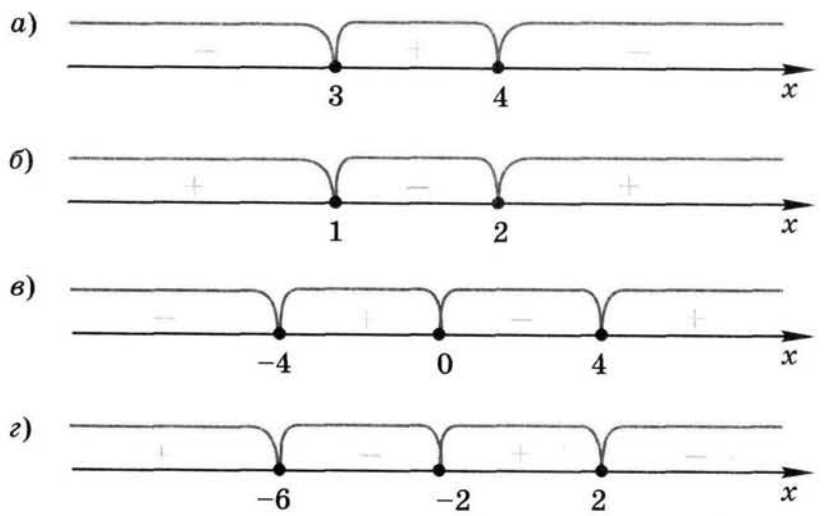


Рис. 41

1.103°. Функция задана графиком (рис. 42). На каких промежутках значения производной этой функции положительны, а на каких — отрицательны?

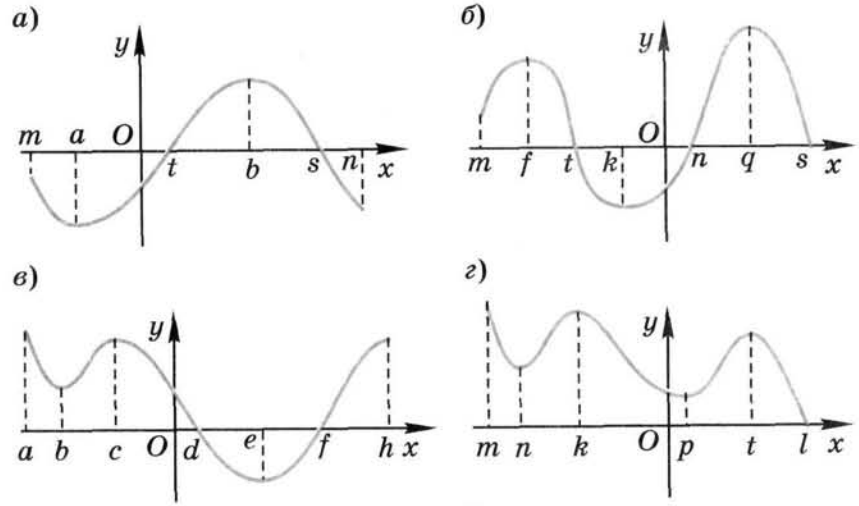


Рис. 42

1.104. Найдите промежутки убывания и возрастания функции f, если ее производная:

1) $f'(x) = (x + 5)(x - 6)$;
2) $f'(x) = (x - 3)(x + 4)$;
3) $f'(x) = (x + 1)(x - 4)(x - 7)$;
4) $f'(x) = (x + 6)(x - 7)(x + 41)$;
5) $f'(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 - 16)$;
6) $f'(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 25)(x^2 - 36)$.

1.105. Найдите промежутки убывания и возрастания функции f, если ее производная:

1) $f'(x) = x^2 - 6x + 9$;
2) $f'(x) = -x^2 - 10x + 25$;
3) $f'(x) = -x^2 + 5x - 16$;
4) $f'(x) = x^2 - 4x + 12$;
5) $f'(x) = -x^3 - 2x^2 + 35x$;
6) $f'(x) = -x^3 + x^2 + 24x$.

1.106. 1) Докажите, что функция $f(x) = \frac{2x^3 - 3}{3}$ является возрастающей в области определения.

А укацыйны партал www.adu.by

2) Докажите, что функция $f(x)=\frac{1-3x^3}{6}$ является убывающей в области определения.

Найдите промежутки возрастания и убывания функции f (1.107—1.110).

1.107. 1) $f(x)=2x^2-x+12$; 2) $f(x)=x^2-2x+\frac{3}{4}$.

1.108. 1) $f(x)=x^3-12x+7$; 2) $f(x)=6x-2x^3-5$;
3) $f(x)=4x^3+9x^2-12x+6$; 4) $f(x)=x^3-x^2-x+2$;
5) $f(x)=x^4-4x-3$; 6) $f(x)=x^4+32x+1$;
7) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3-3x^2+1$;
8) $f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2+2$.

1.109. 1) $f(x)=1-\frac{1}{4x+1}$; 2) $f(x)=\frac{1}{1-4x}+2$;
3) $f(x)=\frac{1}{(3-x)^2}$; 4) $f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$.

1.110. 1) $f(x)=\frac{2x+3}{5x+1}$; 2) $f(x)=\frac{4x+1}{3x+1}$;
3) $f(x)=\frac{2x^2+15x-8}{x}$; 4) $f(x)=\frac{3x^2+8x-15}{x}$;
5) $f(x)=\frac{1-x}{4x^2+8x+13}$; 6) $f(x)=\frac{x-4}{4x^2+12x+9}$.

1.111*. При каких значениях a функция f возрастает на множестве всех действительных чисел, если:
1) $f(x)=ax^3+ax$;
2) $f(x)=ax^5+ax$;
3) $f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+48ax+6x-5$;
4) $f(x)=4x^3+(a-1)x^2+\frac{1}{9}ax+7$?

1.112*. Докажите, что функция $y=f(x)$ является возрастающей (или убывающей) на множестве всех действительных чисел, если:
1) $f(x)=x^3-3x^2+3x+14$;
2) $f(x)=2x^5-x^3+8x-1$;
3) $f(x)=-0{,}8x^5+x^4-3x^3+2x^2-4x+14$;
4) $f(x)=-0{,}2x^5+0{,}5x^4-x^3+x^2-x+14$.

1.113*. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y=f(x)$ и укажите число нулей этой функции, если:
1) $f(x)=4x^3+6x+4\sqrt{5}$; 2) $f(x)=6x^3+9x+3\sqrt{3}$.

1.9. Максимумы и минимумы функции

Точка x_0 называется ***внутренней точкой множества D***, если существует такая окрестность точки x_0, которая содержится во множестве D.

Например, точка 5 (рис. 43) является внутренней точкой промежутка (2; 7], ее окрестность (3; 6) содержится в этом промежутке. А точка 7 не является внутренней точкой промежутка (2; 7], поскольку никакая ее окрестность в этом промежутке не содержится.

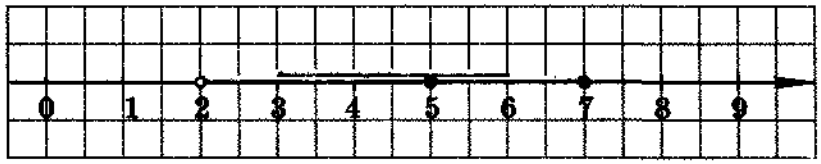


Рис. 43

Рассмотрим функцию f, график которой изображен на рисунке 44. Промежутки возрастания этой функции — $[a; x_1]$, $[x_2; x_3]$, $[x_4; b]$. Промежутки убывания — $[x_1; x_2]$, $[x_3; x_4]$.

Рассмотрим окрестность U точки x_1 (на рисунке эта окрестность отмечена синим цветом). Мы видим, что для любого x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leqslant f(x_1)$, т. е. в окрестности U функция f принимает наибольшее значение в точке x_1. Точка x_1 называется ***точкой максимума*** функции f.

Определение. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции f, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности верно неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

При этом говорят, что функция f имеет в точке x_0 *максимум*.

Адукацыйны партал www.adu.by

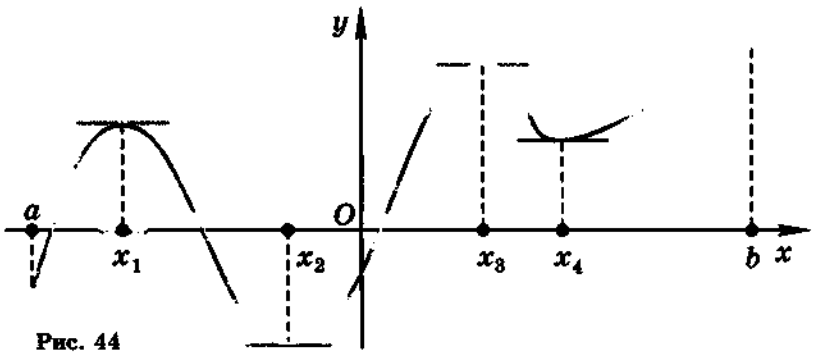


Рис. 44

Функция f, которую мы рассматривали, имеет еще одну точку максимума — x_3. Вообще говоря, функция может иметь несколько точек максимума. А может не иметь ни одной. Например, функция $f(x) = x^2$ не имеет точек максимума.

Наряду с точками максимума функции рассматриваются ***точки минимума***. На рисунке 44 это точки x_2 и x_4.

Определение. Точка x_0 называется *точкой минимума функции f*, если существует такая окрестность точки x_0, что для любого x из этой окрестности верно неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

При этом говорят, что функция f имеет в точке x_0 *минимум*.

Функция может иметь одну, несколько, а может вообще не иметь точек минимума (приведите примеры).

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума функции***.

В каждой точке x интервала возрастания $(a; x_1)$ (см. рис. 43) производная принимает положительные значения, т. е. $f'(x) > 0$, на интервале убывания $(x_1; x_2)$ производная принимает отрицательные значения, т. е. $f'(x) < 0$. Мы говорим: «при переходе через точку x_1 производная меняет знак с «+» на «–».

Естественно ожидать, что в точке максимума x_1, которая разделяет интервалы возрастания и убывания, производная равна нулю, т. е. $f'(x_1) = 0$.

Аналогично и в точке минимума x_2 естественно ожидать, что $f'(x_2) = 0$.

Эти соображения позволяют наглядно представить себе условия экстремума функции.

Сформулируем условия экстремума функции для внутренних точек ее области определения.

Необходимое условие экстремума

Если точка x_0 является точкой экстремума функции f и в точке x_0 существует производная, то $f'(x_0) = 0$.

Достаточное условие экстремума

Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значения производной меняют знак с «+» на «–», то x_0 является точкой максимума.

Если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значения производной меняют знак с «–» на «+», то x_0 является точкой минимума.

Заметим еще, что *если $f'(x_0) = 0$ и при переходе через точку x_0 значения производной не меняют знак, то x_0 не является точкой экстремума.*

Рассмотрим, например, функцию $f(x) = x^3$. Ее производная $f'(x) = 3x^2$, и при переходе через точку $x_0 = 0$ значения производной не меняют знак; точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума функции $f(x) = x^3$. Вам известно, что эта функция возрастает во всей области определения.

Пример 1. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = 2x^6 - 4x^3 + 7.$$

Решение. $f'(x) = (2x^6 - 4x^3 + 7)' = 12x^5 - 12x^2 = 12x^2(x^3 - 1)$;

$f'(x) = 0$, т. е. $12x^2(x^3 - 1) = 0$ при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

На рисунке 45, на котором отмечены промежутки знакопостоянства производной $f'(x)$ и промежутки убывания и возрастания функции $f(x)$, видно, что точка 1 является точкой экстремума (точкой минимума), а точка 0 не является точкой экстремума (поясните почему).

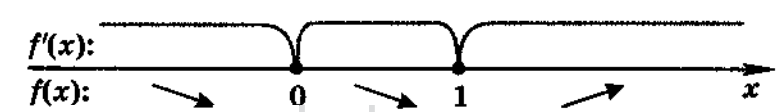


Рис. 45

укацыйны партал www.adu.by

Тот факт, что точка 1 является точкой минимума функции f можно записать: $x_{min} = 1$.

Ответ: $x_{min} = 1$.

Пример 2. а) Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2.$$

б) Найти значения функции f в точках экстремума.

▲в) Изобразить схематически график функции $y = f(x)$.▲

Решение. а) Найдем производную функции f:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3).$$

Производная обращается в нуль при $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. На рисунке 46 отметим промежутки знакопостоянства функции $f'(x)$ и ниже координатной прямой стрелками покажем, возрастает или убывает на каждом из промежутков функция $f(x)$.

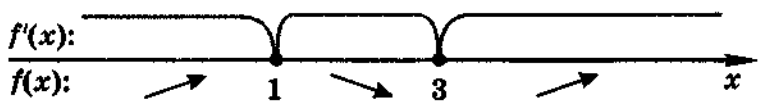


Рис. 46

При переходе через точку 1 значения производной меняют знак с «+» на «−», при переходе через точку 3 они меняют знак с «−» на «+».

Таким образом, функция f возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$, убывает на промежутке $[1; 3]$ и возрастает на промежутке $[3; +\infty)$ (см. рис. 46). Точка 1 является точкой максимума, точка 3 — точкой минимума.

б) Значение функции f в точке максимума равно

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 2 = 2.$$

Значение функции f в точке минимума равно

$$f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 2 = -2.$$

Ответ: $x_{max} = 1$, $x_{min} = 3$; $f(1) = 2$, $f(3) = -2$.

▲ в) Используя точки $(1; f(1))$ и $(3; f(3))$, можно получить схематическое изображение графика функции $y = f(x)$. Сначала на координатной плоскости отмечают точки экстремума функции. Полезно также отметить несколько дополнительных точек, координаты которых удобно вычисляются, например: $(0; -2)$, $(2; 0)$, $(4; 2)$ (рис. 47, *а*). Затем все эти точки соединяют плавной линией (рис. 47, *б*). ▲

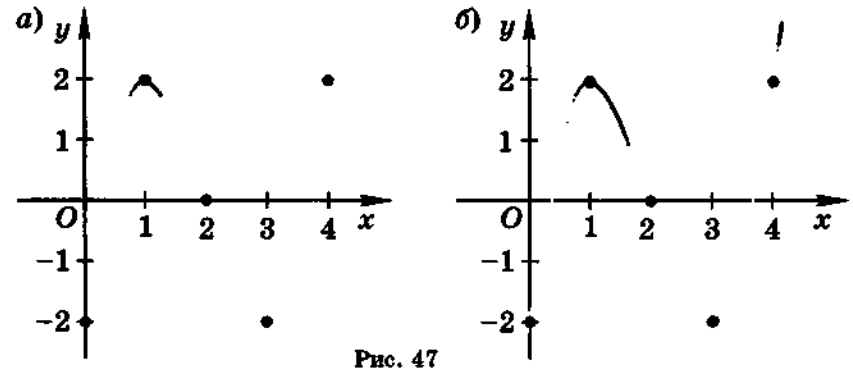


Рис. 47

1. Дайте определение точки максимума функции.
2. Дайте определение точки минимума функции.
3. Дайте определение точек экстремума функции?
4. Сформулируйте необходимое условие экстремума функции.
5. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции.

6*. Как схематично изобразить график функции $y = f(x)$?

Упражнения

1.114°. Функция задана графиком на рисунке 40. Укажите точки максимума и минимума функции и значения функции в этих точках.

1.115°. Функция задана графиком на рисунке 42. Укажите точки экстремума функции.

1.116. Найдите точки экстремума функции f и значения функции в этих точках:

1) $f(x) = 3x^2 - 5x - 1$;
2) $f(x) = 5 - 4x - 4x^2$;
3) $f(x) = -4x^3 - 15x^2 + 18x + 2$;
4) $f(x) = -10x^3 + 51x^2 - 36x + 3$;
5) $f(x) = x^4 - 32x + 7$;
6) $f(x) = -x^4 + 4x - 9$.

Адукацыйны партал www.add.by

Найдите точки максимума и минимума функции $f(x)$ и значения функции в этих точках (1.117—1.120).

1.117. 1) $f(x)=x^3(x-5)$; 2) $f(x)=x^3(x+1)$;
3) $f(x)=\sqrt{x}(1-x)$; 4) $f(x)=(2+x)\sqrt{x}$.

1.118. 1) $f(x)=\frac{3}{x}-12x^2$; 2) $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$; 3) $f(x)=\frac{7}{x}+\frac{x}{7}$;
4) $f(x)=\frac{8}{x}+\frac{x}{2}$; 5) $f(x)=\frac{2x^2+6}{x-1}$; 6) $f(x)=\frac{8-x^2}{3+x}$.

1.119. 1) $f(x)=2x-\sqrt{x}$; 2) $f(x)=2\sqrt{x}-x$;
3) $f(x)=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x}-2x^2$.

1.120. 1) $f(x)=\frac{(x-2)(6+x)}{(x-1)^2}$; 2) $f(x)=\frac{(x-5)(3+x)}{(x+2)^2}$;
3) $f(x)=\frac{x^2+2x}{x^2+2x+2}$; 4) $f(x)=\frac{3x}{x^2+4x+4}$.

1.121. Для функции f укажите:
а) область определения;
б) промежутки возрастания и убывания;
в) точки экстремума и значения функции в этих точках, если:
1) $f(x)=-x^3+12x-15$; 2) $f(x)=-x^3-x-2$;
3) $f(x)=6x^5-10x^3$; 4) $f(x)=5x^3-3x^5$.

*Изобразите схематически график функции $y=f(x)$.

1.122*. Дана функция $f(x)=2{,}5x^4+4x^3+1{,}8$.
1) Укажите точки экстремума и значения функции в этих точках.
2) Решите уравнение $f(x)=f(-1{,}2)$.

1.123*. Дана функция $f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^3+69$.
1) Укажите точки экстремума и значения функции в этих точках.
2) Решите уравнение $f(x)=f(4{,}5)$.

1.124*. Дана функция $f(x)=-0{,}5x^4-16x+\sqrt{21}$.
1) Укажите точки экстремума и значения функции в этих точках.
2) Решите неравенство $f(x)\geqslant f(-2)$.

1.125*. Дана функция $f(x)=-x^4+32x-\sqrt{5}$.
1) Укажите точки экстремума и значения функции в этих точках.
2) Решите неравенство $f(x)<f(2)$.

▲ 1.10. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Промежуток вида $[a; b]$ называется *отрезком*. Точки a и b называются концами этого отрезка.

Пусть на отрезке $[a; b]$ определена функция f, которая имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка. Решим задачу: *найти наибольшее и наименьшее значения функции f на этом отрезке.*

Пусть функция принимает наибольшее значение в некоторой точке $x_0\in[a; b]$. Возможно, что $x_0=a$ либо $x_0=b$. Если же это не так, то x_0 — внутренняя точка отрезка $[a; b]$ и, разумеется, она является точкой максимума функции f (поясните почему). Тогда $f'(x)=0$.

Таким образом, точку, в которой функция принимает наибольшее значение, надо искать среди точек a, b и тех точек интервала $(a; b)$, в которых производная равна нулю. Аналогично и для точки, в которой функция принимает наименьшее значение.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке $[a; b]$, мы поступаем следующим образом:

1) *находим значения функции в тех точках интервала $(a; b)$, в которых ее производная обращается в нуль;*
2) *находим значения функции на концах отрезка $[a; b]$;*
3) *из найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее.*

Адукацыйны партал www.adu.by

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^3+4{,}5x^2-9$ на отрезке $[-4;\ -2]$.

Решение. Найдем производную: $f'(x)=3x^2+9x=3x(x+3)$. Производная обращается в нуль в точках $x_1=-3$, $x_2=0$; точка $x_2=0$ не принадлежит отрезку $[-4;\ -2]$.

Найдем значения функции f в точке -3 и на концах данного отрезка — в точках -4 и -2:

$$f(-3)=4{,}5;\ f(-4)=-1;\ f(-2)=1.$$

Мы видим, что наибольшее значение функции f на отрезке $[-4;\ -2]$ равно 4,5, а наименьшее равно -1. Это для функции f можно записать так:

$$\underset{x\in[-4;-2]}{f_{\text{наиб}}}(x)=f(-3)=4{,}5; \qquad \underset{x\in[-4;-2]}{f_{\text{наим}}}(x)=f(-4)=-1.$$

Ответ: $\underset{x\in[-4;-2]}{f_{\text{наиб}}}(x)=4{,}5;\ \underset{x\in[-4;-2]}{f_{\text{наим}}}(x)=-1.$

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{x}-5x+1$ на отрезке:

а) $[-3;\ -0{,}5]$; б) $[1{,}5;\ 3]$; в) $[3;\ 4]$.

Решение. а) Найдем производную функции f для внутренних точек ее области определения $D(f)=(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{4}{x}-5x+1\right)'=x^2+\frac{4}{x^2}-5=\frac{x^4-5x^2+4}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках: ±1, ±2 (поясните, как находят эти точки). Отрезку $[-3;\ -0{,}5]$ принадлежат две из них: -2 и -1.

Находим значения функции f в точках -2 и -1, а также на концах отрезка — в точках -3 и $-0{,}5$:

$$f(-2)=10\tfrac{1}{3};\quad f(-1)=9\tfrac{2}{3};\quad f(-3)=8\tfrac{1}{3};\quad f(-0{,}5)=11\tfrac{11}{24}.$$

б) Отрезку $[1{,}5;\ 3]$ принадлежит только точка $x=2$. Находим значения функции f в точке 2 и на концах отрезка; из них выбираем наибольшее и наименьшее:

$$f(2)=-8\tfrac{1}{3};\qquad f(1{,}5)=-8\tfrac{1}{24};\qquad f(3)=-6\tfrac{1}{3}.$$

в) Отрезок $[3;\ 4]$ не содержит нулей производной, поэтому находим значения функции f на его концах и сравниваем их:

$$f(3)=-6\tfrac{1}{3};\qquad f(4)=1\tfrac{1}{3}.$$

Ответ: а) $\underset{x\in[-3;\ -0{,}5]}{f_{\text{наиб}}}(x)=11\tfrac{11}{24};\ \underset{x\in[-3;\ -0{,}5]}{f_{\text{наим}}}(x)=8\tfrac{1}{3}$; б) $\underset{x\in[1{,}5;\ 3]}{f_{\text{наиб}}}(x)=-6\tfrac{1}{3};$ $\underset{x\in[1{,}5;\ 3]}{f_{\text{наим}}}(x)=-8\tfrac{1}{3}$; в) $\underset{x\in[3;\ 4]}{f_{\text{наиб}}}(x)=1\tfrac{1}{3};\ \underset{x\in[3;\ 4]}{f_{\text{наим}}}(x)=-6\tfrac{1}{3}.$

Пример 3. Среди прямоугольных треугольников с гипотенузой 8 и катетом x найти треугольники с наибольшей и наименьшей площадями, если:

а) $x\in[2;\ 4]$; б) $x\in[2;\ 6]$.

Решение. По теореме Пифагора длина второго катета равна $\sqrt{64-x^2}$. Площадь прямоугольного треугольника $S(x)$ можно найти по формуле

$$S(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{64-x^2},$$

т. е. $S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2(64-x^2)}$. Функция $S(x)$ принимает наибольшее и наименьшее значения в тех же точках, что и функция $f(x)=x^2(64-x^2)$.

Найдем производную функции f:

$$f'(x)=\left(64x^2-x^4\right)'=128x-4x^3=4x(32-x^2).$$

Найдем нули функции $y=f'(x)$. Это числа:

$$x_1=0;\ x_2=-4\sqrt{2};\ x_3=4\sqrt{2}.$$

а) Промежутку $[2;\ 4]$ числа x_1, x_2, x_3 не принадлежат, поэтому наибольшее (наименьшее) значение функции f, а значит и функции S, может быть только на концах отрезка $[2;\ 4]$:

$$S(2)=2\sqrt{15};\quad S(4)=8\sqrt{3}.$$

Очевидно, что $S(4)>S(2)$.

б) Промежутку $[2;\ 6]$ принадлежит $x_3=4\sqrt{2}$. Сравним $S(2)$, $S\left(4\sqrt{2}\right)$ и $S(6)$:

$$S(2)=2\sqrt{15};\quad S\left(4\sqrt{2}\right)=16;\quad S(6)=2\sqrt{63}.$$

Адукацыйны партал www.adu.by

Очевидно, что $S(2) < S(6) < S(4\sqrt{2})$.

Ответ: а) $\underset{x\in[2;4]}{S_{\text{наиб}}}(x)=8\sqrt{3}$; $\underset{x\in[2;4]}{S_{\text{наим}}}(x)=2\sqrt{15}$;

б) $\underset{x\in[2;6]}{S_{\text{наиб}}}(x)=16$; $\underset{x\in[2;6]}{S_{\text{наим}}}(x)=2\sqrt{15}$.

1. Как находят наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке?
2. Изобразите график функции, определенной на отрезке $[a; b]$, у которой:
   а) наибольшее значение функции не совпадает с ее максимумом;
   б) наибольшее значение функции совпадает с ее максимумом;
   в) наименьшее значение функции не совпадает с ее минимумом;
   г) наименьшее значение функции совпадает с ее минимумом.

Упражнения

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на отрезке I (1.126—1.130).

1.126. 1) $f(x)=1-4x$, $I=[-3; 2]$; 2) $f(x)=5x-1$, $I=[-1; 2]$;
3) $f(x)=-2x^2$, $I=[-2; 1]$; 4) $f(x)=-x^2$, $I=[-1; 2]$;
5) $f(x)=x^2$, $I=[-3; 2]$; 6) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $I=[-2; 4]$.

1.127°. 1) $f(x)=4x-x^2$, $I=[-1; 0]$;
2) $f(x)=2x-x^2$, $I=[-2; 0]$;
3) $f(x)=2x^3-6x$, $I=[-4; 0]$;
4) $f(x)=3x^3+9x$, $I=[0; 2]$.

1.128. 1) $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+1$, $I=[-1; 1]$;
2) $f(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+9$, $I=[-3; -1]$;
3) $f(x)=x^3-2x^2+8x-3$, $I=[-1; 1]$;
4) $f(x)=x^3-2x^2-4x+6$, $I=[-1; 1]$.

1.129. 1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $I=\left[-2; \frac{1}{2}\right]$;
2) $f(x)=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$, $I=[1; 4]$;

3) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $I=[1; 2]$;
4) $f(x)=x+\frac{2}{x^2}$, $I=[-4; -1]$.

1.130. 1) $f(x)=\frac{-4x^2+16x-4}{5x^2}$, $I=[0{,}375; 0{,}75]$;
2) $f(x)=\frac{-2x^2+18x-3}{5x^2}$, $I=\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$;
3) $f(x)=\frac{7x}{x^2+1}$, $I=[-2; 0{,}5]$;
4) $f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$, $I=[-5; 0{,}2]$.

1.131. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)=-\frac{2}{3}t^3+2t^2+70t$ (t — время в секундах, $s(t)$ — путь в метрах). В какой момент времени скорость движения точки будет наибольшей и каково значение этой скорости, если:
1) $t\in[1; 5]$; 2) $t\in[5; 9]$;
3) $t\in[9; 13]$; 4) $t\in[8; 14]$?

1.132. Материальная точка движется прямолинейно по закону $s(t)=-0{,}25t^4+2t^3+1$ (t — время в секундах, $s(t)$ — путь в метрах). В какой момент времени скорость движения точки будет наибольшей и каково значение этой скорости, если:
1) $t\in[3; 5]$; 2) $t\in[5; 7]$;
3) $t\in[7; 9]$; 4) $t\in[6; 10]$?

1.133. 1) Среди всех прямоугольников с периметром 20 м и длиной стороны x м, где $x\in[2; 8]$, найдите прямоугольники с наибольшей и наименьшей площадями. Укажите площади этих прямоугольников.
2) Среди всех прямоугольников с периметром 36 м и длиной стороны x м, где $x\in[5; 12]$, найдите прямоугольники с наибольшей и наименьшей площадями. Укажите площади этих прямоугольников.

укацыйны партал www.adu.by

▲ 1.11. Наибольшее и наименьшее значения функции на интервале

Многие задачи приводят к необходимости находить наибольшее или наименьшее значение функции не на отрезке, а на интервале. Приведем два примера таких задач.

Пример 1. Проволочной сеткой длиной 240 м надо огородить прямоугольный участок земли. Какие размеры должен иметь участок, чтобы его площадь была наибольшей?

Решение. Пусть x — длина одной из сторон участка (в метрах), тогда длина смежной стороны равна $(120 - x)$, а площадь участка можно найти по формуле

$$S(x) = x(120 - x).$$

По смыслу задачи число x удовлетворяет неравенству $0 < x < 120$, т. е. принадлежит интервалу $(0; 120)$.

Таким образом, нам нужно установить, при каком значении x из интервала $(0; 120)$ функция $S(x)$ принимает на этом интервале наибольшее значение.

Подобную задачу для отрезка мы решать умеем.

Рассмотрим функцию $S(x) = x(120 - x)$ на отрезке $[0; 120]$. Найдем ее наибольшее значение на этом отрезке:

$$S'(x) = 120 - 2x;$$

$S'(x) = 0$ при $120 - 2x = 0$,

т. е. при $x = 60$;

$$S(0) = 0(120 - 0) = 0;$$

$$S(60) = 60(120 - 60) = 60^2 = 3600;$$

$$S(120) = 120(120 - 120) = 0.$$

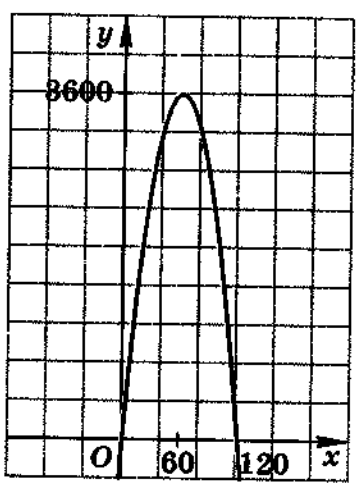


Рис. 48

Таким образом, функция $S(x)$ принимает свое наибольшее значение в точке $x = 60$. Эта точка лежит внутри интервала $(0; 120)$.

Итак, $\underset{x \in (0;120)}{S_{\text{наиб}}}(x) = S(60) = 3600$.

Схематическое изображение графика функции $y = S(x)$ приведено на рисунке 48.

Ответ: 60×60 м.

Замечание. Конечно, эту задачу мы могли бы решить и не используя производной, поскольку $S(x)$ — хорошо известная нам квадратичная функция.

Пример 2. Прямоугольный участок земли площадью 3600 м^2 надо огородить проволочной сеткой. Какие размеры должен иметь участок, чтобы длина сетки была наименьшей?

Решение. Пусть x — длина одной из сторон участка (в метрах), тогда длина смежной стороны равна $\frac{3600}{x}$, а периметр участка можно найти по формуле

$$P(x) = 2\left(x + \frac{3600}{x}\right).$$

По смыслу задачи число x удовлетворяет неравенству $x > 0$, т. е. принадлежит интервалу $(0; +\infty)$.

Таким образом, нам надо найти значение x, при котором функция $P(x)$ принимает наименьшее значение на интервале $(0; +\infty)$.

Здесь мы уже не можем воспользоваться правилом отыскания наименьшего значения функции на отрезке.

Поступим следующим образом. Найдем производную функции P:

$$P'(x) = \left(2\left(x + \frac{3600}{x}\right)\right)' = 2\left(\frac{x^2 + 3600}{x}\right)' =$$

$$= 2\,\frac{2x^2 - x^2 - 3600}{x^2} = 2\,\frac{x^2 - 3600}{x^2}.$$

Производная $P'(x)$ обращается в нуль в точках $x = -60$ и $x = 60$, из них только точка $x = 60$ принадлежит интервалу $(0; +\infty)$. Исследуем знаки значений производной на этом интервале.

При $0 < x < 60$ значения производной отрицательны и функция $P(x)$ убывает; при $x > 60$ значения производной положительны и функция $P(x)$ возрастает (рис. 49).

Следовательно, своего наименьшего значения эта функция достигает в точке $x = 60$, в которой ее производная обращается в нуль. Итак, $\underset{x \in (0; +\infty)}{P_{\text{наим}}}(x) = P(60) = 2\left(60 + \frac{3600}{60}\right) = 240$.

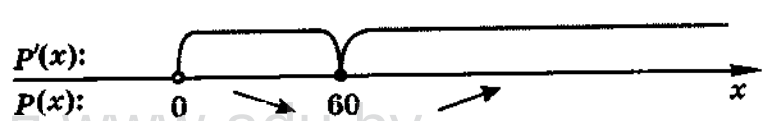


Рис. 49

Архіў укацыйны партал www.adu.by

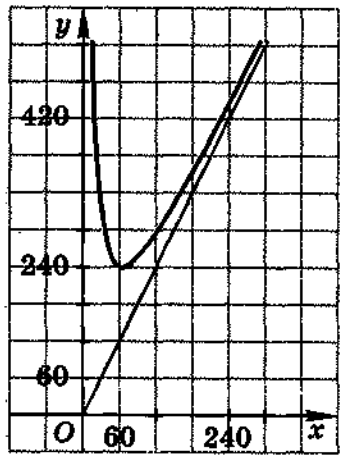


Рис. 50

Схематическое изображение графика функции $y = P(x)$, иллюстрирующее решение этой задачи, показано красной линией (рис. 50).

Заметим, что точка $x = 60$ является точкой минимума функции $P(x)$ (поясните почему).

Ответ: 60×60 м.

Конечно, и в задаче из примера 1 можно находить наибольшее значение функции $S(x)$ на интервале $(0; 120)$, а не на отрезке. В этом случае следует искать для функции $S(x)$ точку экстремума — сделайте это самостоятельно.

Если функция имеет на интервале только одну точку экстремума — точку минимума (или точку максимума), то она принимает в этой точке наименьшее (наибольшее) значение на данном интервале.

При решении задач на нахождение наименьшего (или наибольшего) значения можно придерживаться следующего порядка действий:

1) *ввести переменную;*

2) *выразить через эту переменную и известные данные ту величину, наименьшее (или наибольшее) значение которой надо найти, т. е. ввести функцию;*

3) *определить каким-либо способом наименьшее (или наибольшее) значение введенной функции.*

Упражнения

1.134. 1) Каковы должны быть стороны прямоугольного участка с периметром 120 м, чтобы площадь этого участка была наибольшей?

2) Прямоугольный участок земли площадью 4 га огораживается забором. Каковы должны быть размеры участка, чтобы длина забора была наименьшей?

1.135. 1) Число 48 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим. Найдите эти слагаемые.

2) Число 16 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

1.136. 1) Число 18 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма удвоенного одного слагаемого и квадрата другого слагаемого была наименьшей.

2) Число 10 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

1.137. 1) Из всех прямоугольников, вписанных в окружность радиусом 1 см, укажите тот прямоугольник, который имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

2) Требуется сделать коробку с квадратным дном наибольшего объема без крышки при заданной площади поверхности 12 дм^2. Определите размеры коробки.

1.138. 1) Среди равнобедренных треугольников с данной боковой стороной a найдите треугольник наибольшей площади.

2) Боковые стороны и меньшее основание равнобедренной трапеции равны 24 см. Какой должна быть длина большего основания, чтобы площадь трапеции была наибольшей?

1.139. 1) В прямоугольный треугольник с гипотенузой 16 см и углом 60° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

2) В прямоугольный треугольник с катетом 12 см и противолежащим ему углом 30° вписан прямоугольник, основание которого лежит на гипотенузе. Каковы должны быть размеры прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

1.140. 1) В треугольник с основанием 4 см и высотой 3 см вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Определите наибольшую площадь такого прямоугольника.

2) В треугольник с основанием 6 м и высотой 8 м вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Определите наибольшую площадь такого прямоугольника.

укацыйны партал www.adu.by

1.12. Первообразная

В предыдущих пунктах мы научились находить производные некоторых функций. Теперь будем решать обратную задачу: находить функцию, производная которой равна заданной функции.

Определение. **Функция F называется *первообразной* для функции f на некотором промежутке, если для всех x из этого промежутка верно равенство**

$$F'(x)=f(x).$$

Пример 1. Доказать, что первообразной для функции $f(x)=2x-3$ является функция:

а) $F_1(x)=x^2-3x$;

б) $F_2(x)=x^2-3x+4$;

в) $F_3(x)=x^2-3x-47$.

Доказательство. а) $F_1'(x)=(x^2-3x)'=2x-3$;

б) $F_2'(x)=(x^2-3x+4)'=2x-3$;

в) $F_3'(x)=(x^2-3x-47)'=2x-3$.

Нетрудно заметить, что любая функция $F(x)=x^2-3x+C$, где C — постоянная, имеет ту же производную, что и функция $F_1(x)=x^2-3x$ из а).

И вообще,

если функция $y=F(x)$ является первообразной для функции $y=f(x)$ на некотором промежутке, то и функция $y=F(x)+C$ (C — постоянная) является первообразной для функции f на этом промежутке.

Зная формулы для нахождения производных, несложно убедиться, что для функции $f(x)=x$ первообразная $F(x)=\frac{x^2}{2}+C$, а для функции $f(x)=\frac{1}{x^2}$ — первообразная $F(x)=-\frac{1}{x}+C$ (см. таблицу на форзаце I).

Пример 2. Для функции $f(x)=3x^2-2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $P(-1;\ 0)$.

Решение. Используя значения формул производных для x^3 и x, находим, что $F(x)=x^3-2x+C$ (проверьте это).

Зная, что график функции $y=F(x)$ проходит через точку $P(-1;\ 0)$, получим $-1+2+C=0$, откуда находим $C=-1$.

Итак, $F(x)=x^3-2x-1$.

Ответ: $F(x)=x^3-2x-1$.

Пример 3. Найти закон прямолинейного движения тела, если его скорость $v(t)=at$ (a — постоянная), а в начальный момент времени $t=0$ пройденный телом путь равен нулю.

Решение. Мы знаем, что в соответствии с механическим (физическим) смыслом производной (см. п. 1.5) верно равенство $v(t)=s'(t)$. Значит, функция $s(t)$ является первообразной функции $v(t)=at$. А первообразная этой функции равна $\frac{at^2}{2}+C$. Таким образом, $s(t)=\frac{at^2}{2}+C$. По условию имеем $s(0)=0$. Поэтому верно равенство $0=\frac{a\cdot 0^2}{2}+C$, откуда находим $C=0$. Итак, $s(t)=\frac{at^2}{2}$.

Ответ: $s(t)=\frac{at^2}{2}$.

1. Сформулируйте задачу, обратную нахождению производной функции.
2. Какая функция называется первообразной функции f на некотором промежутке?
3. Может ли одна и та же функция f иметь различные первообразные? Если может, то чем они отличаются?

Упражнения

1.141. Докажите, что функция F есть первообразная для функции f, если:

1) $F(x)=x^3-4x+3$, $f(x)=3x^2-4$;
2) $F(x)=x^4-5x^2-8$, $f(x)=4x^3-10x$;
3) $F(x)=x^5+2x^3+x$, $f(x)=5x^4+6x^2+1$;
4) $F(x)=2x^6+x^4-5x^3-3$, $f(x)=12x^5+4x^3-15x^2$.

1.142. Является ли функция F первообразной для функции f, если:

1) $F(x)=\frac{1-x^2}{2}$, $f(x)=-x$;
2) $F(x)=\frac{2-6x^2}{3}$, $f(x)=-4x$?

Анлайн-укацыйны партал www.adu.by

1.143. 1) Известно, что функция $F(x)=4x^3+\frac{x^2}{6}-5x+1$ является первообразной для функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите сумму $a+b+c$.

2) Известно, что функция $F(x)=5x^3-\frac{x^2}{4}+3x-2$ является первообразной для функции $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите сумму $a+b+c$.

1.144. 1) Для функции $f(x)=x^2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $P(-1;\ 2)$.

2) Для функции $f(x)=x^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $P(1;\ -1)$.

1.145. F является первообразной функции f. Найдите ту первообразную F, которая обращается в нуль в точке x_0, если:

1) $f(x)=x^2-4x+1,\ x_0=-1$;

2) $f(x)=x^3-2x^2+6x-5,\ x_0=1$.

1.146*. 1) Найдите ту первообразную функции $f(x)=3x-1$, для которой уравнение $F(x)=5$ имеет единственное решение.

2) Найдите ту первообразную функции $f(x)=5x+1$, для которой уравнение $F(x)=2$ имеет единственное решение.

1.147. 1) Точка движется по прямой так, что ее скорость $v(t)$ в момент времени t равна $10+0{,}2t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 5 с до 15 с, если ее скорость измеряется в метрах в секунду.

2) Точка движется по прямой так, что ее скорость $v(t)$ в момент времени t равна $5-0{,}1t$. Найдите путь, пройденный точкой за время от 2 с до 8 с, если ее скорость измеряется в метрах в секунду.

1.148. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v(t)=t+3t^2$ (t — время в секундах, $v(t)$ — скорость в метрах в секунду). Найдите зависимость пути от времени, если в момент времени $t=0$:

1) точка находилась в начале координат;

2) координата точки равнялась 2.

Глава 2

Тригонометрические выражения

2.1. Градусная мера углов и дуг

Вы уже знакомы с понятиями угла, центрального угла, дуги окружности, соответствующей этому центральному углу. Вам известно, что величины углов и дуг окружности измеряются в градусах.

Градусом называется величина центрального угла, который опирается на $\frac{1}{360}$ часть окружности (обозначается 1°).

Градусной мерой дуги окружности называется градусная мера соответствующего центрального угла. Градусная мера всей окружности равна 360°, а полуокружности — 180°.

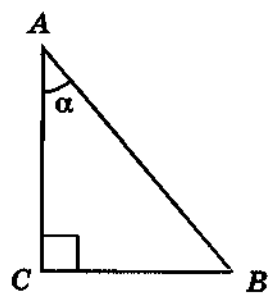


Рис. 51

В планиметрии были введены понятия *синуса, косинуса, тангенса и котангенса для острых углов прямоугольного треугольника*. Например, в прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) (рис. 51):

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB},\quad \cos\alpha=\frac{AC}{AB},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{CB}{AC},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{AC}{CB}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A},\qquad \operatorname{ctg}A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

При решении различных примеров часто используют значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов 30°, 45°, 60° (см. таблицу на с. 78).

Пример. Доказать для острого угла α тождество:

а) $\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha$; б) $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$;

в) $\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$.

Доказательство. а) Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C=90°$, $\angle A=\alpha$ (см. рис. 51). Соот-

Адукацыйны партал www.adu.by

ветственно имеем $\angle B = 90° - \alpha$. По определениям синуса и косинуса острого угла получим:

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \cos A,$$

т. е. $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$. ☒

б), в), г) Доказательства аналогичны доказательству а), выполните их самостоятельно.

α	30°	45°	60°
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

а Названия «косинус» и «котангенс» представляют собой сокращение терминов complementi sinus, complementi tangens («синус дополнения», «тангенс дополнения»), выражающих тот факт, что $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ равны, соответственно, синусу и тангенсу угла, дополняющего α до 90°, т. е. $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha)$.

Слово «тригонометрия» происходит от греческих слов trigonon — треугольник и metron — мера (metreo — измеряю).

?

1. Что называется углом?
2. Какой угол называется центральным?
3. Что называется градусом?
4. В каких единицах измеряются величины углов?
5. Какой угол называется полным? Развернутым? Прямым?
6. Что называется синусом острого угла? Косинусом острого угла?
7. Что называется тангенсом острого угла? Котангенсом острого угла?

Упражнения

2.1°. AB — сторона правильного n-угольника, вписанного в окружность с центром O. Найдите величину угла AOB, если:

1) $n = 3$; 2) $n = 5$; 3) $n = 6$; 4) $n = 12$.

2.2°. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен половине гипотенузы.

1) Каковы величины острых углов этого треугольника?
2) Укажите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса этих углов.

2.3°. В прямоугольном треугольнике катеты равны.

1) Каковы величины острых углов этого треугольника?
2) Укажите значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса этих углов.

2.4°. Постройте угол α и найдите приближенно его величину, зная, что:

1) $\sin\alpha = 0{,}8$; 2) $\sin\alpha = 0{,}6$; 3) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$;
4) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 5) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha = 2\frac{3}{5}$;
7) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$; 8) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{4}$.

2.5°. Сравните острые углы α и β, если:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ и $\sin\beta = \frac{3}{4}$;
2) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$ и $\cos\beta = \frac{2}{5}$;
3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{5}$ и $\operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{3}$.

2.6°. Какова величина острого угла α, если:

1) $\sin\alpha = \cos\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$?

Найдите значение выражения (2.7—2.9).

2.7. 1) $2\sin 60° + 3\sin 45° + 10\cos 60° - 4\cos 45° - \operatorname{tg} 60°$;
2) $4\operatorname{tg} 30° - 5\cos 30° + 6\sin 60° - 3\operatorname{tg} 60° + \operatorname{tg} 45°$;
3) $6\operatorname{ctg} 60° - 2\sin 60° + 12\sin 60°\cos 60°$;
4) $2\sin 30° + 6\cos 60° - 4\operatorname{tg} 45° + 7\operatorname{tg} 30°\operatorname{ctg} 30°$.

2.8. 1) $\cos 60° - \operatorname{tg}^2 45° + \frac{3}{4}\operatorname{tg}^2 30° + 4\cos^2 30° - \sin 30°$;
2) $\cos^2 30° + 2\sin 30° - \operatorname{ctg}^2 45° + \operatorname{ctg}^2 30° + \cos 60°$;
3) $\operatorname{ctg}^2 45° + \cos 60° - \sin^2 60° + \frac{3}{4}\operatorname{ctg}^2 60°$;
4) $\operatorname{tg}^2 30° - \operatorname{tg} 45° - \cos^2 30° + 2\sin 60°$.

укацыйны партал www.adu.by

2.9. 1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ при α, равном 30°; 45°; 60°;
2) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2$ при α, равном 30°; 45°; 60°;
3) $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha$ при α, равном 15°; 22,5°; 30°;
4) $\sin^2 2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\cos^2 2\alpha$ при α, равном 15°; 22,5°; 30°.

2.10. Упростите выражение:

1) $\cos(90°-\alpha)-\sin\alpha+\dfrac{\sin(90°-\alpha)}{\cos\alpha}$;

2) $\sin(90°-\alpha)-\cos\alpha+\dfrac{\cos(90°-\alpha)}{\sin\alpha}$;

3) $\dfrac{\sin(90°-\alpha)\cos(90°-\alpha)}{\operatorname{ctg}(90°-\alpha)}$;

4) $\dfrac{\cos(90°-\alpha)\operatorname{ctg}(90°-\alpha)}{\operatorname{tg}(90°-\alpha)}$.

2.11. Представьте, используя значения только синусов (или только косинусов) острых углов, данное выражение в виде тригонометрического:

1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{5\sqrt{2}}{6}+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$;

3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{5}{8}-\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$;

4) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{18}-\dfrac{3\sqrt{2}}{8}-2\sqrt{2}$.

2.12. Представьте, используя значения только тангенсов (или только котангенсов) острых углов, данное выражение в виде тригонометрического:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}+1-4\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\dfrac{1}{3}-5\sqrt{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+3$;

3) $2\sqrt{3}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1+\dfrac{\sqrt{3}}{9}$; 4) $\dfrac{1}{9}-6+4\sqrt{3}+\dfrac{7\sqrt{3}}{12}$.

2.13*. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=1-\sin 30°+\sin^2 30°-\sin^3 30°+\ldots$;
2) $A=1-\operatorname{tg}30°+\operatorname{tg}^2 30°-\operatorname{tg}^3 30°+\ldots$.

2.2. Угол как мера поворота

Пусть дана плоскость и луч с началом в точке O, который вращается вокруг этой точки от начального положения OA до конечного положения OB. Тогда величину поворота, совершенного этим лучом, естественно измерять величиной угла, который образуют лучи OA и OB в конце вращения. Поясним это на нескольких примерах.

На рисунке 52 изображен поворот луча против хода часовой стрелки на угол 27° (начальное положение вращающегося луча на рисунках показано стрелкой синего цвета, а конечное — красного).

На рисунке 53 изображен поворот луча против хода часовой стрелки на угол 310°.

На рисунке 54 изображен поворот луча против хода часовой стрелки на угол 360°. Такой поворот называют ***полным оборотом***.

На рисунке 55 изображен поворот луча на угол $1097°=360°\cdot 3+17°$ против хода часовой стрелки, т. е. луч, вращаясь от начального положения OA до конечного положения OB, совершит 3 полных оборота и еще поворот на 17°.

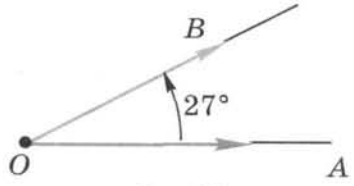


Рис. 52

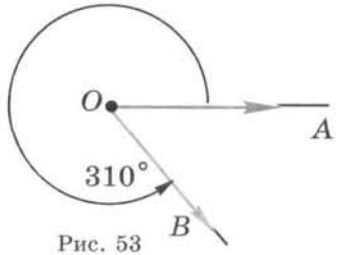


Рис. 53

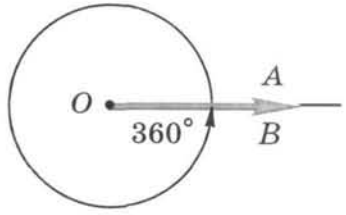


Рис. 54

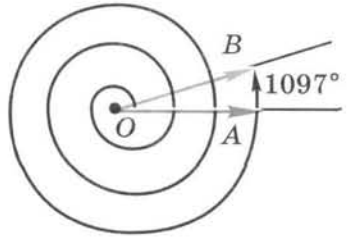


Рис. 55

укацыйны партал www.adu.by

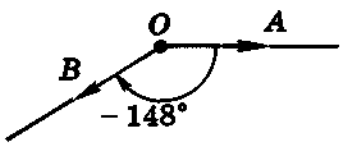


Рис. 56

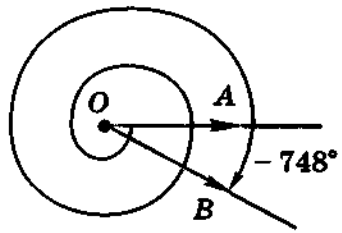


Рис. 57

Если поворот луча совершен *против хода часовой стрелки*, то угол поворота принято считать *положительным* (как во всех предыдущих примерах). Если же поворот луча совершен *по ходу часовой стрелки*, то угол поворота принято считать *отрицательным*.

Например, на рисунке 56 изображен поворот на угол –148°, а на рисунке 57 — поворот на угол –748°.

На рисунках 52—57 положение луча OA будем называть ***началом отсчета***, а о луче OB будем говорить, что он определяет ***угол поворота***.

Любой угол поворота α можно представить в виде

$$\alpha = 360° \cdot n + \varphi, \text{ где } n \in Z \text{ и } 0 \leqslant \varphi < 360°. \qquad (1)$$

5378	360
360	14
1778	
1440	
338	

Рис. 58

Для того чтобы угол α представить в виде (1), нужно разделить α на 360° с остатком. Например, для угла α, равного 5378°, получим:

$$5378° = 360° \cdot 14 + 338° \text{ (рис. 58).}$$

Здесь $n = 14$, $\varphi = 338°$.

Для угла α, равного –5378°, получим:

$$\alpha = -5378° = 360°(-14) - 338° =$$

прибавим к полученному выражению 360°, а затем отнимем 360°:

$$= 360°(-14) - 338° + 360° - 360° =$$
$$= 360°(-15) + 22°, \text{ здесь } n = -15, \varphi = 22°.$$

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице. Такую окружность будем называть ***единичной*** или ***тригонометрической окружностью***, а круг, который она ограничивает, — ***тригонометрическим кругом***.

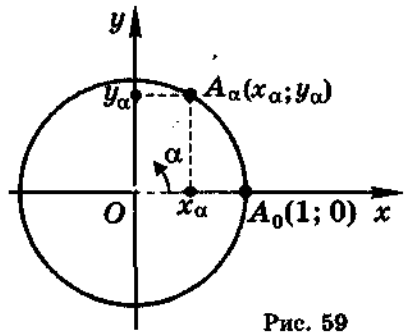


Рис. 59

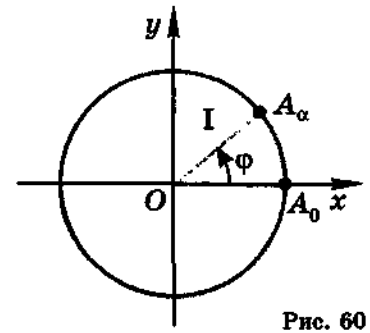


Рис. 60

В дальнейшем мы будем рассматривать только углы с вершинами в начале координат. Положительную полуось абсцисс примем за начало отсчета для любого угла α. Точку ее пересечения с единичной окружностью будем обозначать A_0 (рис. 59). Точку пересечения с единичной окружностью луча, определяющего угол α, будем обозначать A_α (читается *«А со значком α»*), а ее координаты — x_α и y_α (см. рис. 59).

Точка окружности A_α может оказаться в одном из четырех координатных углов. Чтобы определить положение точки A_α на окружности, угол α представляют в виде (1).

Если $0° < \varphi < 90°$, то говорят, что угол φ *принадлежит* I четверти, а угол α *оканчивается* в I четверти (рис. 60).

Аналогично для II, III и IV четвертей (рис. 61, 62, 63).

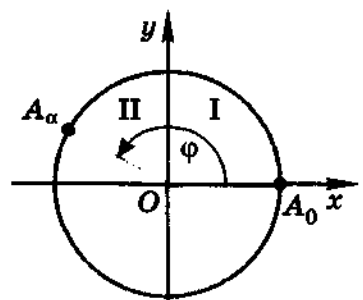


Рис. 61

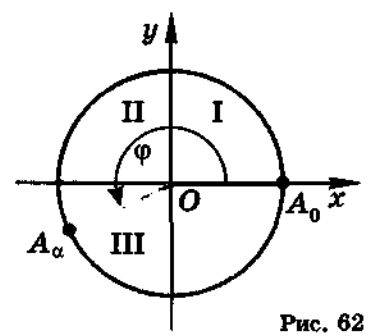


Рис. 62

Адукацыйны партал www.adu.by

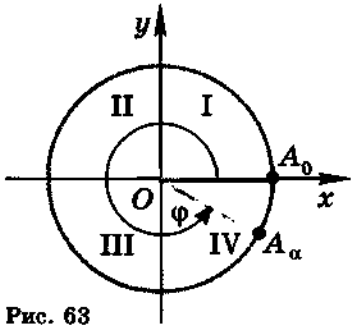


Рис. 63

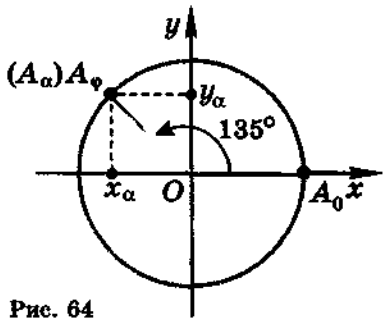


Рис. 64

Если угол $\varphi = 90° \cdot n$, где $n \in \{1; 2; 3; 4\}$, то угол α оканчивается на одной из полуосей системы координат Oxy, т. е. *на границе двух четвертей*.

Например, когда $\varphi = 180°$, то говорят, что угол α *оканчивается на границе* II и III четвертей.

Пример 1. Отметить на единичной окружности точку A_α, если:

а) $\alpha = 1935°$; б) $\alpha = -3630°$.

Решение. а) $\alpha = 1935° = 360° \cdot 5 + 135°$, здесь $n = 5$, $\varphi = 135°$.

Отмечаем точку A_φ на окружности (рис. 64). Она совпадает с точкой A_α.

б) $\alpha = -3630° = 360°(-10) - 30° + 360° - 360° = 360°(-11) + 330°$, здесь $n = -11$, $\varphi = 330°$.

Отмечаем точку A_φ на данной окружности (рис. 65). Она совпадает с точкой A_α.

Пример 2. Записать по четыре значения величины угла поворота α, если точка A_α совпадает с точкой: а) B; б) C; в) M (рис. 66).

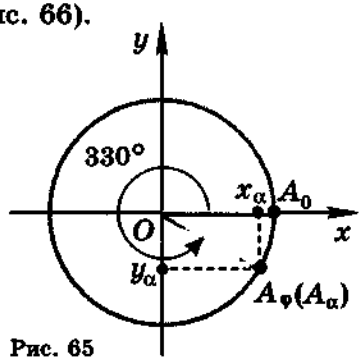


Рис. 65

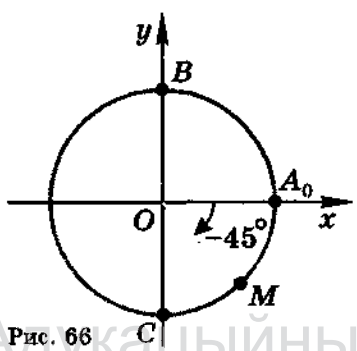


Рис. 66

Адукацыйны партал www.adu.by

Решение. а) $\alpha_1 = 90°$; $\alpha_2 = 450°$; $\alpha_3 = -270°$; $\alpha_4 = -630°$;
б) $\alpha_1 = -90°$; $\alpha_2 = 270°$; $\alpha_3 = -450°$; $\alpha_4 = -810°$;
в) $\alpha_1 = -45°$; $\alpha_2 = 315°$; $\alpha_3 = -405°$; $\alpha_4 = 675°$.

1. Какой поворот луча называется полным?
2. Что можно сказать о величине угла поворота, если движение луча от начального положения к конечному происходило:
   а) по ходу часовой стрелки;
   б) против хода часовой стрелки?
3. В каком виде следует представить угол поворота α, чтобы определить положение точки A_α на единичной окружности?
4. В каком случае говорят, что угол φ принадлежит I (II, III, IV) четверти? Сделайте чертеж.
5. В каком случае говорят, что угол α оканчивается:
   а) в I (II, III, IV) четверти;
   б) на границе III и IV четвертей?

Упражнения

2.14°. На единичной окружности отметьте точку A_α и запишите все возможные значения углов поворота, которые оканчиваются в точке A_α, если α равно:

1) 90°, 180°, 270°, 360°;
2) –180°, –90°, –360°, –270°.

2.15°. На тригонометрической окружности отметьте точки A_α, если:

1) $\alpha = 30° + 90° \cdot n$, $n \in Z$;
2) $\alpha = 45° + 90° \cdot n$, $n \in Z$;
3) $\alpha = 60° + 180° \cdot n$, $n \in Z$;
4) $\alpha = 15° + 180° \cdot n$, $n \in Z$.

На единичной окружности отметьте точку A_α для указанного угла поворота α (**2.16—2.17**).

2.16°. 1) –210°, –240°, –225°, –255°, –300°, –330°;
2) –60°, –120°, –150°, –315°, –210°, –165°.

2.17°. 1) 930°, 1320°, 1485°, 840°, 3720°, 945°;
2) 2460°, 4350°, 855°, 1290°, 1500°, 2640°.

2.18°. В какой четверти оканчивается угол α, равный:

1) 292°, 186°, 306°, 2184°, 1748°;
2) −172°, −206°, −291°, −341°, −268°;
3) −1201°, −2189°, −2617°, −1854°;
4) 3521°, 2849°, 1853°, 1792°, 2171°?

2.19°. Представьте угол β в виде $360° \cdot n \pm \varphi$, где $n \in Z$ и φ — угол, удовлетворяющий условию $0° \leqslant \varphi < 360°$, если угол β равен:

1) 426°; 2) 693°;
3) −849°; 4) −784°;
5) 3524°; 6) 2461°;
7) −1341°; 8) −2889°.

2.20°. Укажите множество значений угла α, если $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$:

1) $\alpha = 360° \cdot n + 50°$; 2) $\alpha = 360° \cdot n + 190°$;
3) $\alpha = 360° \cdot n + 270°$; 4) $\alpha = 360° \cdot n + 180°$.

2.21. Известно, что $\beta = 360° \cdot n + 60°$, $n \in Z$. Укажите такое значение n (если оно существует), при котором угол β равен:

1) 60°; 2) 3660°; 3) −1020°;
4) −3900°; 5) −300°; 6) −780°.

2.22. Дана единичная окружность с центром в начале координат. Укажите четверть, в которой оканчивается угол поворота $\frac{\beta}{2}$, если известно, что угол β измеряется целым числом градусов и это наименьший из всех положительных углов, которые оканчиваются:

1) во II четверти;
2) в III четверти;
3) в IV четверти.

2.23. Дана тригонометрическая окружность. Известно, что $\angle A_0OA_\alpha = \varphi$. Какой угол поворота α может соответствовать точке тригонометрической окружности A_α (укажите не менее трех значений α), если угол φ равен:

1) 280°; 2) 75°; 3) 345°; 4) 136°?

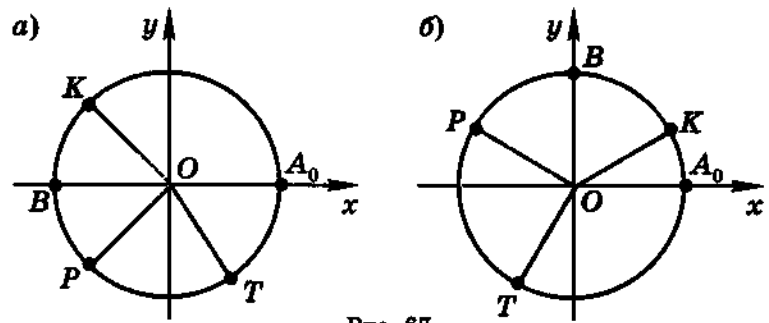


Рис. 67

2.24°. Запишите по три значения α для точки A_α единичной окружности (рис. 67), если известно, что ее положение совпадает с точкой:

1) B; 2) P; 3) K; 4) T.

2.25. Запишите по три возможных значения α, если известно, что точка тригонометрической окружности A_α совпадает с точкой:

1) $A_{215°}$; 2) $A_{735°}$; 3) $A_{1625°}$; 4) $A_{2095°}$.

2.26. Сравните с нулем абсциссу и ординату точки A_α единичной окружности, если угол поворота α равен:

1) 172°; 2) 247°; 3) −1241°; 4) −2819°.

2.27. Сравните с нулем абсциссу и ординату точки A_α единичной окружности, если угол поворота α оканчивается на:

1) оси Ox; 2) оси Oy.

2.28. Укажите пять значений градусной меры угла α, если известно, что ордината точки A_α единичной окружности равна:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) 1.

2.29. Укажите пять значений градусной меры угла α, если известно, что абсцисса точки A_α единичной окружности равна:

1) $-\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) −1; 6) 1.

Адукацыйны партал www.add.by

2.3. Радианная мера углов и дуг

Углы и дуги окружности можно измерять не только в градусах. Рассмотрим еще одну единицу измерения углов и дуг — радиан.

Определение. ***Радианом*** **называется величина центрального угла, который опирается на дугу окружности длиной в один радиус (обозначается 1 рад).**

Соответственно дуга величиной один радиан — это дуга, длина которой равна радиусу.

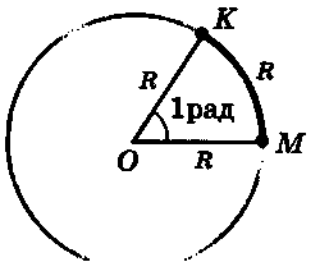


Рис. 68

На рисунке 68 построена окружность с центром O и радиусом 17 мм, и на ней синей линией отмечена дуга MK, длина которой равна радиусу, т. е. 17 мм. Величина угла MOK равна одному радиану, т. е. $\angle MOK = 1$ рад; соответственно и величина дуги MK равна одному радиану, т. е. $\cup MK = 1$ рад. Этот угол (дугу), как и любой другой, можно измерять в градусах.

Будем рассуждать так: на дугу длиной R опирается центральный угол 1 рад. Следовательно, на дугу длиной πR опирается центральный угол π рад. Дуга длиной πR — это полуокружность, а на полуокружность опирается центральный угол 180°. Значит, π рад $= 180°$, откуда и получаем соотношения между двумя единицами измерения углов:

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ; \qquad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}. \qquad (1)$$

Если в эти формулы вместо числа π подставить его приближенное значение 3,14, то получится:

$$1 \text{ рад} \approx 57°19'; \qquad 1^\circ \approx 0{,}02 \text{ рад}.$$

Пример 1. Выразить в радианах углы: 35°; −135°.

Решение. $35^\circ = 1^\circ \cdot 35 = \frac{\pi}{180} \text{ рад} \cdot 35 = \frac{7\pi}{36} \text{ рад};$

$$-135^\circ = -1^\circ \cdot 135 = -\frac{\pi}{180} \text{ рад} \cdot 135 = -\frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Ответ: $35^\circ = \frac{7\pi}{36}$ рад; $-135^\circ = -\frac{3\pi}{4}$ рад.

Пример 2. Используя то, что $\pi \approx 3{,}14$, выразить (приближенно) в градусах углы: −2 рад, $\frac{\pi}{12}$ рад.

Решение. $-2 \text{ рад} = -2 \cdot 1 \text{ рад} = -2 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{-360^\circ}{3{,}14} \approx -115^\circ;$

$$\frac{\pi}{12} \text{ рад} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ.$$

Ответ: $-2 \text{ рад} \approx -115^\circ$; $\frac{\pi}{12}$ рад $= 15^\circ$.

Воспользовавшись равенством (1) из п. 2.2, любой угол поворота α, выраженный в радианах, можно представить в виде

$$\alpha = 2\pi n + \varphi, \text{ где } n \in Z \text{ и } 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \qquad (2)$$

Пример 3. Используя формулу (2), найти n и φ для угла поворота α, равного:

а) $3{,}5\pi$; б) $-0{,}4\pi$.

Решение. а) $\alpha = 3{,}5\pi = 2\pi + 1{,}5\pi = 2\pi \cdot 1 + 1{,}5\pi$; здесь $n = 1$, $\varphi = 1{,}5\pi$;

б) $\alpha = -0{,}4\pi = -0{,}4\pi + 2\pi - 2\pi = 2\pi(-1) + 1{,}6\pi$; здесь $n = -1$, $\varphi = 1{,}6\pi$;

Ответ: а) $n = 1$, $\varphi = 1{,}5\pi$; б) $n = -1$, $\varphi = 1{,}6\pi$.

1. Какой центральный угол имеет величину 1 рад?
2. Сколько радиан содержит:
   а) полный угол; б) развернутый угол; в) прямой угол?
3. Запишите формулу для выражения:
   а) градуса в радианах; б) радиана в градусах.
4. В каком виде следует представить угол поворота α, выраженный в радианах, чтобы узнать, в какой четверти он оканчивается?

Упражнения

Выразите в градусах угол (2.30—2.31).

2.30°. 1) $\frac{2\pi}{3}$ рад; 2) $-\frac{5\pi}{6}$ рад; 3) $-\frac{3\pi}{4}$ рад;
4) $\frac{5\pi}{9}$ рад; 5) $\frac{7\pi}{12}$ рад; 6) $-\frac{21\pi}{20}$ рад;
7) $1{,}2\pi$ рад; 8) $-2{,}4\pi$ рад.

Адукацыйны партал www.adu.by

2.31°. 1) 0,2 рад; 2) 3,1 рад; 3) 5 рад;
4) 2,7 рад; 5) 9,2 рад; 6) 10 рад.

2.32. Выразите в радианах угол:

1) 2°; 2) 10°; 3) 40°; 4) 50°;
5) –135°; 6) –270°; 7) 1021°; 8) 905°.

2.33. Выразите в градусах и радианах величины углов:

1) равностороннего треугольника;
2) прямоугольного равнобедренного треугольника;
3) правильного шестиугольника;
4) правильного двенадцатиугольника;
5) правильного десятиугольника;
6) правильного пятиугольника.

2.34. Выразите в градусах и радианах величину угла, под которым видна сторона правильного n-угольника из его центра, если:

1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 5$;
4) $n = 8$; 5) $n = 12$; 6) $n = 6$.

2.35°. Отметьте на тригонометрической окружности точку A_α, укажите ее координаты x_α и y_α и запишите все углы поворота, которые оканчиваются в точке A_α, если угол α (в радианах) равен:

1) 0; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) π; 4) $\frac{3\pi}{2}$; 5) 2π.

2.36°. Отметьте на тригонометрической окружности точку A_α и сравните ее координаты x_α и y_α с нулем, если угол α (в радианах) равен:

1) $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$; 2) $\frac{7\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{8}$;
3) $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$; 4) $-\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{9\pi}{8}$, $-\frac{5\pi}{8}$.

2.37°. Отметьте на единичной окружности точку A_α и сравните ее координаты x_α и y_α, если радианная мера угла φ равна:

1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$;
5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{3\pi}{4}$; 7) $\frac{\pi}{8}$; 8) $\frac{3\pi}{8}$.

2.38. Для данного значения радианной меры угла α отметьте на тригонометрической окружности точку A_α, сравните ее координаты x_α и y_α с нулем и запишите все углы поворота, которые оканчиваются в точке A_α:

1) 2 рад; 2) 3 рад; 3) –4 рад;
4) –5 рад; 5) 10 рад; 6) 11 рад;
7) –8 рад; 8) –7 рад.

2.39. Представьте угол β в виде разности (суммы) угла $\frac{\pi}{2}$ рад и некоторого острого угла α, если радианная мера угла β равна:

1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{\pi}{8}$; 3) $\frac{\pi}{12}$;
4) $\frac{4\pi}{5}$; 5) $\frac{5\pi}{6}$; 6) $\frac{7\pi}{12}$.

2.40. По формуле $\alpha = 2\pi n + \varphi$, где $n \in Z$ и $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, найдите значения n и φ и определите, в какой четверти оканчивается угол α, если его радианная мера равна:

1) $10{,}6\pi$; 2) $-7{,}9\pi$; 3) $-\frac{19\pi}{3}$;
4) $\frac{46\pi}{3}$; 5) $-\frac{24\pi}{5}$; 6) $-\frac{51\pi}{7}$;
7) $\frac{5\pi}{6}$; 8) $\frac{7\pi}{8}$.

2.41. Известно, что $\beta = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$. Укажите такое значение k (если оно существует), при котором угол β равен:

1) $\frac{\pi}{12}$ рад; 2) $\frac{\pi}{4}$ рад;
3) $-\frac{\pi}{4}$ рад; 4) $-\frac{\pi}{2}$ рад;
5) $-\frac{5\pi}{4}$ рад; 6) $\frac{19\pi}{4}$ рад.

2.4. Синус и косинус произвольного угла

В курсе геометрии вы познакомились с понятиями *синуса*, *косинуса*, *тангенса* и *котангенса* углов от 0° до 180°. В тригонометрии эти понятия определяются для произвольных углов.

Адукацыйны партал www.adu.by

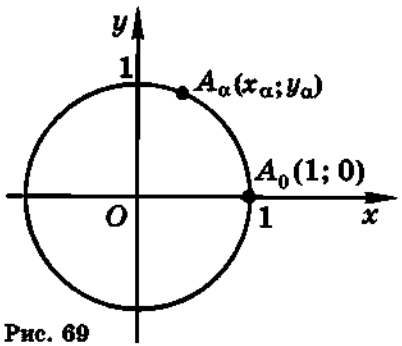


Рис. 69

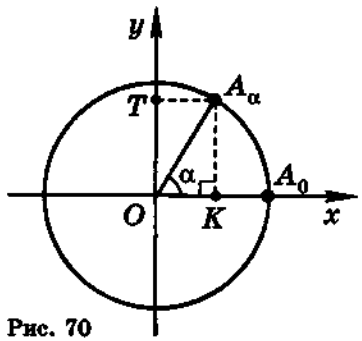


Рис. 70

Рассмотрим единичную окружность.

Возьмем на ней две точки $A_0(1; 0)$ и $A_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ (рис. 69).

Пусть α — острый угол. Из точки A_α опустим перпендикуляры $A_\alpha K$ и $A_\alpha T$ соответственно на оси Ox и Oy (рис. 70). Из прямоугольного треугольника $OA_\alpha K$ ($\angle K = 90°$) имеем:

$$\sin\alpha = \frac{A_\alpha K}{OA_\alpha} \quad \text{и} \quad \cos\alpha = \frac{OK}{OA_\alpha}.$$

Поскольку $A_\alpha K = OT = y_\alpha$, $OK = x_\alpha$ и $OA_\alpha = 1$, то получаем:

$$\sin\alpha = y_\alpha \quad \text{и} \quad \cos\alpha = x_\alpha,$$

т. е. синус угла α равен ординате точки A_α, а косинус угла α — абсциссе точки A_α.

Пусть теперь α — произвольный угол.

Определение. ***Синусом угла*** α **называется ордината точки** A_α **единичной окружности, т. е.**

$$\sin\alpha = y_\alpha.$$

Определение. ***Косинусом угла*** α **называется абсцисса точки** A_α **единичной окружности, т. е.**

$$\cos\alpha = x_\alpha.$$

Каждому углу α соответствует определенная точка A_α на единичной окружности, а этой точке соответствуют ее координаты x_α и y_α. Поэтому каждому углу α соответствуют определенные значения $\sin\alpha = y_\alpha$ и $\cos\alpha = x_\alpha$.

Пример 1. Найти приближенные значения (с точностью до 0,1) синуса и косинуса угла α, если α равен:

а) 30°; б) 155°.

Решение. а) $\alpha = 30°$; для соответствующей точки тригонометрической окружности (рис. 71) найдем приближенные значения ее координат:

$$y_\alpha = \sin 30° = 0{,}5 \text{ и } x_\alpha = \cos 30° \approx 0{,}9.$$

б) $\alpha = 155°$;

$$x_\alpha = \cos 155° \approx -0{,}9 \text{ и } y_\alpha = \sin 155° \approx 0{,}4.$$

Ответ: а) $\sin 30° = 0{,}5$; $\cos 30° \approx 0{,}9$;

б) $\sin 155° \approx 0{,}4$; $\cos 155° \approx -0{,}9$.

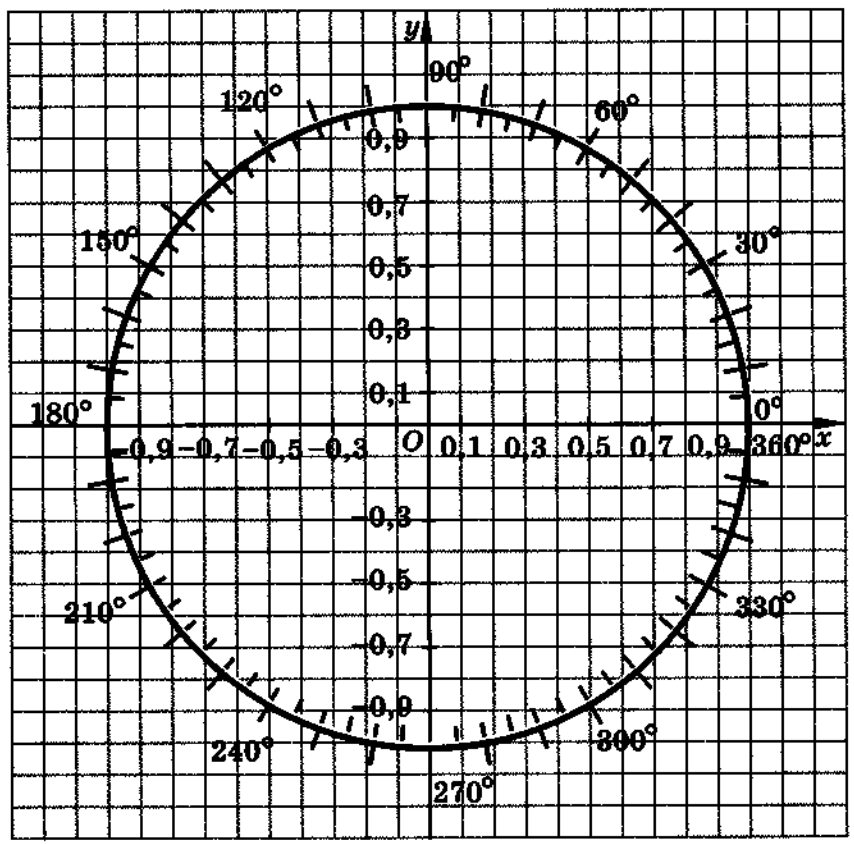


Рис. 71

Адукацыйны партал www.adu.by

Пример 2. Найти приближенные значения (с точностью до 0,1) $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

а) $\frac{3\pi}{4}$; б) 2,5.

Решение. а) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ (рис. 72);

$$y_\alpha = \sin\frac{3\pi}{4} \approx 0{,}7; \qquad x_\alpha = \cos\frac{3\pi}{4} \approx -0{,}7.$$

б) $\alpha = 2{,}5$ принадлежит III четверти; для соответствующей точки тригонометрической окружности (рис. 73) найдем приближенные значения ее координат:

$$x_\alpha = \cos 2{,}5 \approx -0{,}8;\ y_\alpha = \sin 2{,}5 \approx 0{,}6.$$

Ответ: а) $\sin\frac{3\pi}{4} \approx 0{,}7$; $\cos\frac{3\pi}{4} \approx -0{,}7$;

б) $\sin 2{,}5 \approx 0{,}6$; $\cos 2{,}5 \approx -0{,}8$.

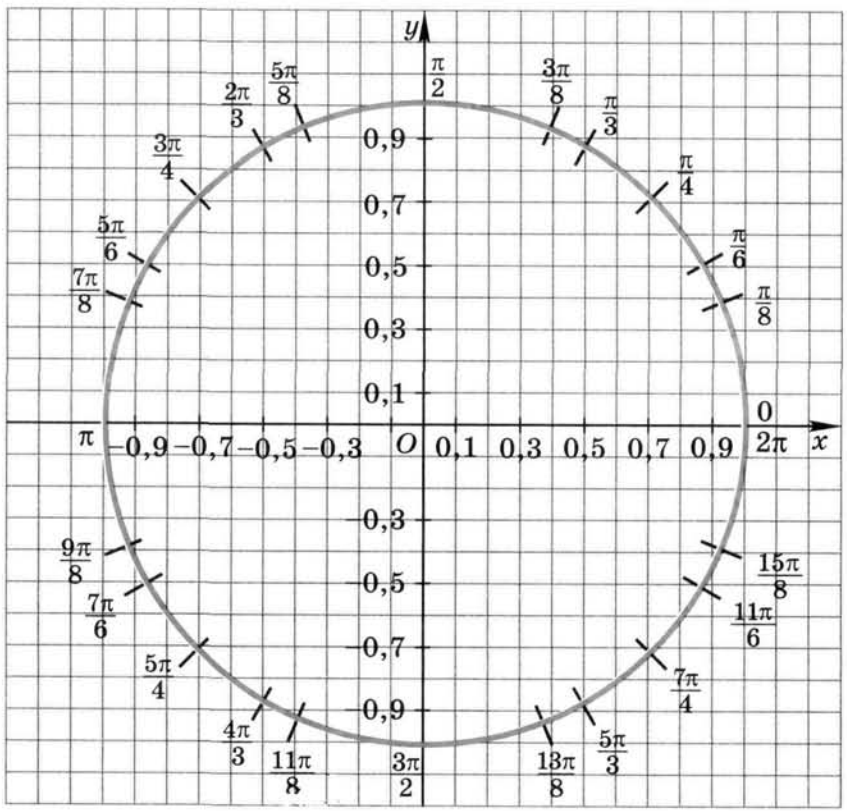


Рис. 72

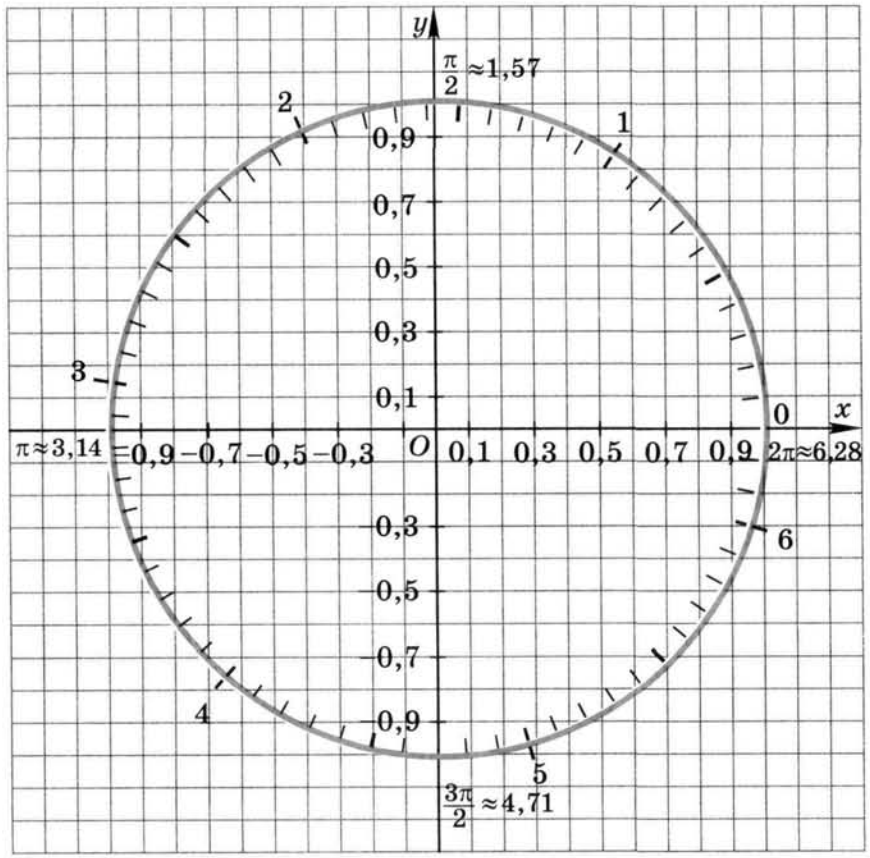


Рис. 73

Уравнение единичной окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Поскольку координаты любой точки $A_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$ единичной окружности удовлетворяют ее уравнению, то при любом α будет верным равенство

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1. \qquad (1)$$

Это равенство называется ***основным тригонометрическим тождеством.***

(Напомним определение тождества. Равенство двух выражений $A = B$ называется тождеством, если оно превращается

Адукацыйны партал www.adu.by

в верное числовое равенство при любых значениях переменных, для которых оба выражения A и B имеют смысл.)

Когда углы измеряют в радианах, то при записи синуса и косинуса этих углов наименование «радиан» не пишется (и не произносится).

Например, выражения «косинус 7» и «косинус угла 7 радиан» означают одно и то же.

Наименование «радиан» обычно не пишут и не произносят, но подразумевают (пишут «$\cos 7$»). А градусы пишут обязательно, поскольку значения, например, $\cos 7°$ и $\cos 7$ различны ($\cos 7 = \cos(7 \text{ рад}) \approx \cos 399° = \cos 39° \neq \cos 7°$).

Для нахождения значений синусов и косинусов углов можно использовать тригонометрическую окружность, таблицы, микрокалькуляторы и т. д.

Каждый угол α можно представить в виде

$$\alpha = 2\pi n + \varphi, \text{ где } n \in Z,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi \text{ (см. п. 2.3).}$$

Так как углы α и φ отличаются на целое число полных оборотов, то точки A_α и A_φ на тригонометрической окружности совпадают. Поэтому верны равенства:

$$\sin\alpha = \sin\varphi,\ \cos\alpha = \cos\varphi, \text{ т. е.}$$

$$\sin(2\pi n + \varphi) = \sin\varphi,\ \cos(2\pi n + \varphi) = \cos\varphi, \text{ где } n \in Z.$$

Пример 3. Доказать тождество:

а) $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; б) $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$;
в) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; г) $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

Доказательство. а), б) Точки A_α и $A_{-\alpha}$ единичной окружности (при любом значении α) симметричны относительно оси Ox, значит, ординаты этих точек — противоположные числа, а абсциссы — равные числа (рис. 74):

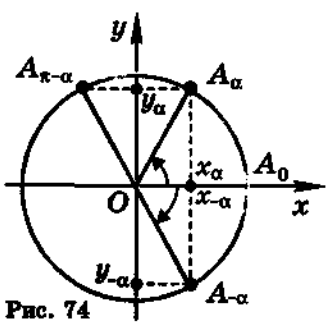


Рис. 74

$$y_{-\alpha} = -y_\alpha \text{ и } x_{-\alpha} = x_\alpha.$$

По определениям синуса и косинуса имеем:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \text{ и } \cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

в), г) Точки $A_{-\alpha}$ и $A_{\pi-\alpha}$ (при любом значении α) симметричны относительно начала координат (см. рис. 74), значит,

$$y_{\pi-\alpha} = -y_{-\alpha} \text{ и } x_{\pi-\alpha} = -x_{-\alpha}.$$

По определениям синуса и косинуса имеем:

$$\sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) \text{ и } \cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha).$$

Используя тождества а) и б), получаем:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \text{ и } \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha. \boxtimes$$

Название «синус» происходит от латинского слова sinus — «перегиб», «пазуха», представляет собой перевод арабского слова «джива» («тетива лука»), которым обозначали синус индийские математики. К идее рассмотрения тригонометрического круга с радиусом, равным единице, подошли в XI в.

1. Какую окружность называют единичной? Как еще ее называют?
2. Что называется тригонометрическим кругом?
3. Какой вид имеет уравнение единичной окружности?
4. Запишите и докажите основное тригонометрическое тождество.
5. Что называется синусом (косинусом) угла α?
6. Могут ли синус и косинус одного и того же угла α быть равными нулю?

Упражнения

2.42°. Верно ли, что:

1) $\sin\alpha + \sin(-\alpha) = 0$; 2) $\cos(-\alpha) + \cos\alpha = 0$;
3) $\sin(\pi - \alpha) + \sin\alpha = 0$; 4) $\cos(\pi - \alpha) + \cos\alpha = 0$?

2.43°. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha - \sin(-\alpha) - 2\sin(\pi - \alpha)$;
2) $\cos\alpha - \cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)$;
3) $(\sin(\pi - \alpha) + \cos(-\alpha))^2 - 2\cos(\pi - \alpha)\sin\alpha$;
4) $(\cos(\pi - \alpha) + \sin(-\alpha))^2 - 2\sin(\pi - \alpha)\cos(-\alpha)$.

Акацыйны партал www.adu.by

2.44°. Используя рисунок 71, найдите приближенные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

1) 65°, 160°, 335°; 2) −40°, −125°, −340°;

3) 410°, 1705°, 3360°; 4) −775°, −470°, −1988°.

2.45°. Используя рисунок 72, найдите приближенные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

1) $\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{4}$;

2) $-\frac{\pi}{10}, -\frac{3\pi}{5}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{14\pi}{3}, -\frac{22\pi}{5}, -\frac{13\pi}{6}$;

3) $\frac{44\pi}{3}, \frac{51\pi}{5}, \frac{17\pi}{4}, -\frac{62\pi}{3}, -\frac{74\pi}{3}, -\frac{87\pi}{4}$.

2.46°. Используя рисунок 73, найдите приближенные значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ при α, равном:

1) 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 2) 4; 4,5; 5; 5,5; 6;

3) −4; −4,5; −5; −5,5; −6; 4) −1; −1,5; −2; −2,5; −3.

Найдите значение выражения (2.47—2.48).

2.47. 1) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

3) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

5) $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

6) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

2.48. 1) $\sin\frac{3\pi}{4}+\cos\frac{3\pi}{4}$; 2) $\sin\frac{5\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{6}$;

3) $\sin\frac{2\pi}{3}-1$; 4) $\cos\frac{2\pi}{3}+1$;

5) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)-\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)-\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$;

6) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

2.49. Укажите пять возможных значений радианной меры угла α, если известно, что $\sin\alpha$ равен:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) −1.

2.50. Укажите пять возможных значений радианной меры угла α, если известно, что $\cos\alpha$ равен:

1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) −1; 6) 1.

2.51°. Укажите такой угол α (если он существует), для которого верны равенства:

1) $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=1$; 2) $\sin\alpha=1$ и $\cos\alpha=0$;

3) $\sin\alpha=-1$ и $\cos\alpha=1$; 4) $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=0$;

5) $\sin\alpha=0$ и $\cos\alpha=-1$; 6) $\sin\alpha=-1$ и $\cos\alpha=0$.

2.52°. Укажите такой угол α (если он существует), для которого верны равенства:

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ и $\cos\alpha=\frac{4}{5}$;

2) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$ и $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ и $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$;

4) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\sin\alpha=-0{,}6$ и $\cos\alpha=0{,}8$;

6) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.53. Укажите все значения угла α, удовлетворяющие равенству:

1) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, если:

а) $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{5\pi}{2}$;

в) $-\frac{7\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi\leqslant\alpha\leqslant2\pi$.

2.54. Укажите все значения угла α, удовлетворяющие равенству:

1) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, если:

а) $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$; б) $0\leqslant\alpha\leqslant4\pi$;

в) $-7\pi\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$; г) $-\frac{7\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant2\pi$.

Акацыйны партал www.adu.by

2.55*. 1) Зная, что верно равенство $\sin(\pi-\alpha)+\cos(-\alpha)=0{,}2$, найдите значение выражения $2\sin\alpha\cos\alpha$.

2) Зная, что верно равенство $2\sin(-\alpha)\cos(\pi-\alpha)=0{,}44$, найдите значение выражения $\sin\alpha+\cos\alpha$.

2.5. Свойства выражений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$

1. Множество значений синуса и косинуса

Из определения синуса и косинуса следует, что для любого угла α существует, и притом единственное, значение $\sin\alpha$ (ордината точки A_α) и существует, и притом единственное, значение $\cos\alpha$ (абсцисса точки A_α).

Точка A_α лежит на единичной окружности, поэтому она может иметь любую ординату в пределах от -1 до $+1$ и никакой другой ординаты иметь не может. А ее ордината — это $\sin\alpha$. Значит, $\sin\alpha$ *может принимать любое значение от* -1 *до* $+1$ *и никаких других значений принимать не может* (рис. 75).

В частности, отсюда следует

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1.$$

Аналогично доказывается, что $\cos\alpha$ *может принимать любое значение от* -1 *до* $+1$ *и никаких других значений принимать не может* (рис. 76).

В частности, отсюда следует

$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Таким образом, ***множеством значений*** как синуса, так и косинуса является промежуток $[-1; 1]$.

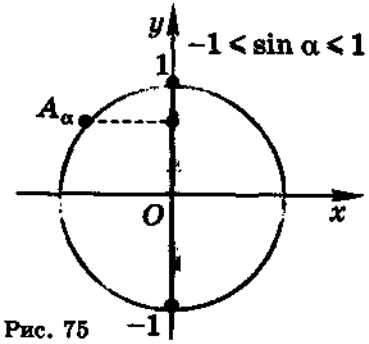


Рис. 75

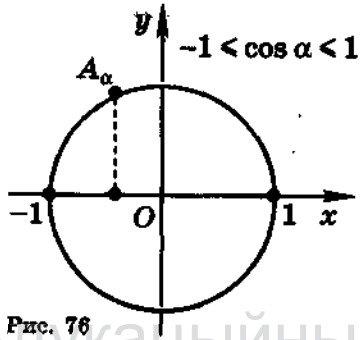


Рис. 76

Адукацыйны партал www.adu.by

Пример 1. Построить углы, оканчивающиеся в разных четвертях, косинус которых равен:

а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{5}{2}$.

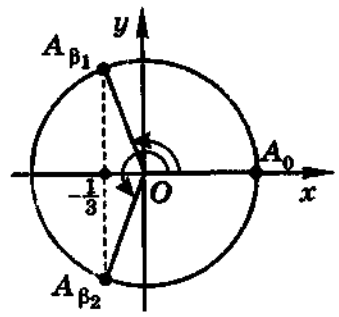


Рис. 77

Решение. а) Построение углов β_1 и β_2, для которых $\cos\beta_1=-\frac{1}{3}$ и $\cos\beta_2=-\frac{1}{3}$, показано на рисунке 77.

в) Построить угол по этому условию невозможно (поясните почему).

Пример 2. Существует ли угол, синус которого равен:

а) $-0{,}7$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$?

Решение. а), б) Да, поскольку указанные значения принадлежат промежутку $[-1; 1]$ — множеству значений синуса.

в) Нет, поскольку $\frac{\pi}{2}\approx 1{,}57\notin[-1; 1]$.

2. Наименьшее и наибольшее значения синуса и косинуса

Из точек, лежащих на единичной окружности (рис. 78), наименьшую ординату, равную -1, имеет точка $A_{\frac{3\pi}{2}}(0; -1)$, т. е. $\sin\alpha$ принимает ***наименьшее значение*** при

$$\alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Наибольшую ординату, равную 1, имеет точка $A_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$, т. е. $\sin\alpha$ принимает ***наибольшее значение*** при

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

$\sin\alpha=1$, *если* $\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

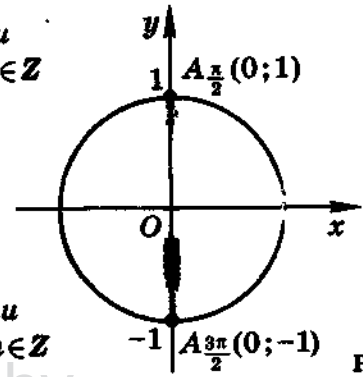


Рис. 78

$\sin\alpha=-1$, *если* $\alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

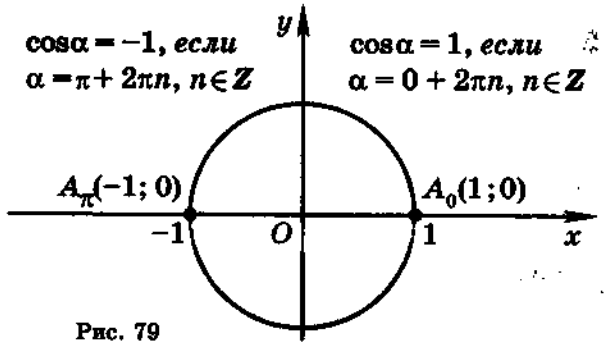


Рис. 79

Из точек, лежащих на единичной окружности (рис. 79), наименьшую абсциссу, равную -1, имеет точка $A_\pi(-1;\ 0)$, т. е. выражение $\cos\alpha$ принимает ***наименьшее значение*** при

$$\alpha = \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Наибольшую абсциссу, равную 1, имеет точка $A_0(1;\ 0)$, т. е. выражение $\cos\alpha$ принимает ***наибольшее значение*** при

$$\alpha = 0 + 2\pi n = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Замечание. Разумеется, что свойства синуса и косинуса, сформулированные в этом пункте, можно записать, используя не только радианную, но и градусную меру угла.

Например, $\cos\alpha = -1$ при $\alpha = 180° + 360°n,\ n \in Z$.

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения выражения:

а) $\cos x + 5$; б) $\sin^2 x + 5$.

Решение. а) Поскольку наименьшим значением выражения $\cos x$ является число -1, то наименьшим значением выражения $\cos x + 5$ является число $-1 + 5 = 4$; аналогично наибольшим значением выражения является число $1 + 5 = 6$.

б) Наименьшим значением выражения $\sin^2 x$ является число 0, а наибольшим значением — число 1, соответственно, для выражения $\sin^2 x + 5$ наименьшее значение равно 5, а наибольшее равно 6.

Ответ: а) 4 и 6; б) 5 и 6.

3. Нули синуса и косинуса

Ординаты, равные нулю, имеют те точки единичной

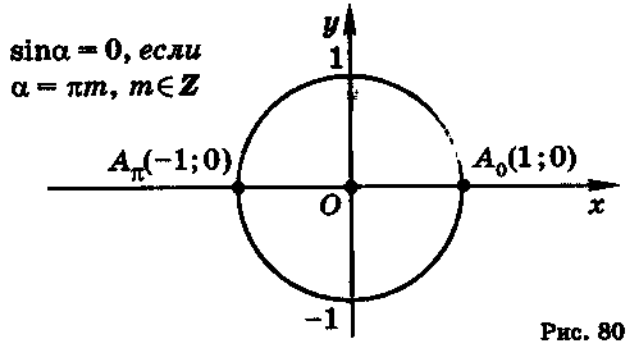


Рис. 80

окружности, которые лежат на оси Ox, т. е. $A_0(1;\ 0)$ и $A_\pi(-1;\ 0)$ (рис. 80). Итак, $\sin\alpha = 0$ при

$$\alpha = 0 + 2\pi k = \pi \cdot 2k,\ k \in Z$$

и при $\alpha = \pi + 2\pi k = \pi(1 + 2k),\ k \in Z$.

Обе группы значений α можно записать одной формулой:

$$\alpha = \pi m,\ m \in Z.$$

Эти значения называют ***нулями синуса.***

Абсциссы, равные нулю, имеют те точки единичной окружности, которые лежат на оси Oy, т. е. точки $A_{\frac{\pi}{2}}(0;\ 1)$ и $A_{\frac{3\pi}{2}}(0;\ -1)$ (рис. 81). Итак, $\cos\alpha = 0$ при

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi \cdot 2k,\ k \in Z,$$

и при $\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi k = \frac{\pi}{2} + \pi(1 + 2k),\ k \in Z$.

Обе группы значений α можно записать одной формулой:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Эти значения называют ***нулями косинуса.***

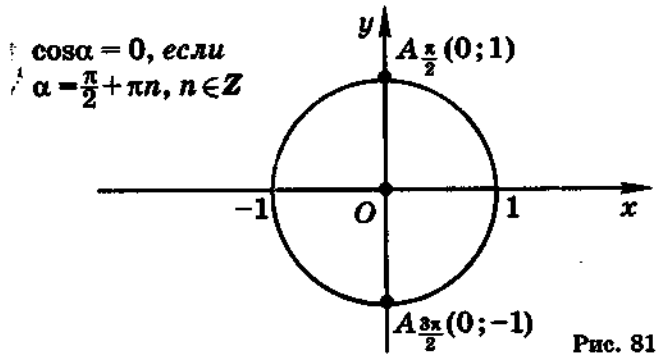


Рис. 81

Адукацыйны партал

Пример 4. Решить уравнение:

а) $\sin x = 0$; б) $\sin(x+3) = 0$; в) $\cos 7x = 0$.

Решение. а) Решить уравнение $\sin x = 0$ — то же самое, что найти нули синуса. Следовательно, $x = \pi n$, $n \in Z$.

б) Поскольку $\sin(x+3) = 0$, то:

$$x + 3 = \pi n,\ n \in Z;\ \text{откуда}\ x = \pi n - 3,\ n \in Z.$$

в) Поскольку $\cos 7x = 0$, то

$$7x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\ \text{откуда}\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7},\ n \in Z.$$

Ответ: а) πn, $n \in Z$; б) $\pi n - 3$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in Z$.

4. Промежутки знакопостоянства синуса и косинуса

Знаки, которые могут иметь значения $\sin\alpha$, т. е. знаки ординат точек A_α, в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α, показаны на рисунке 82.

Именно:

если угол α оканчивается в I или во II четверти, т. е. $0 + 2\pi n < \alpha < \pi + 2\pi n$, $n \in Z$, то $\sin\alpha > 0$;
если угол α оканчивается в III или в IV четверти, т. е. $\pi + 2\pi n < \alpha < 2\pi + 2\pi n$, $n \in Z$, то $\sin\alpha < 0$.

Таким образом, мы установили ***промежутки знакопостоянства синуса.***

Знаки, которые могут иметь значения $\cos\alpha$, т. е. знаки абсцисс точек A_α, в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α, показаны на рисунке 83.

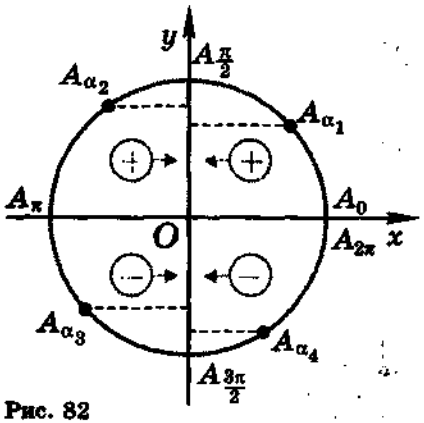


Рис. 82

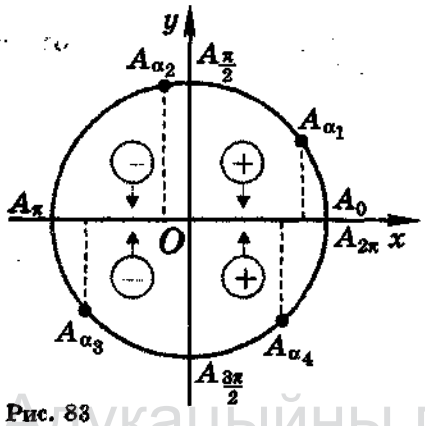


Рис. 83

Адукацыйны партал www.adu.by

Именно:

если угол α оканчивается в I или в IV четверти, т. е. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, то $\cos\alpha > 0$;
если угол α оканчивается во II или в III четверти, т. е. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$, то $\cos\alpha < 0$.

Таким образом, мы установили ***промежутки знакопостоянства косинуса.***

Пример 5. Для каких значений α, удовлетворяющих условию $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \frac{4\pi}{3}$, верно, что:

а) $\sin\alpha > 0$; б) $\sin\alpha < 0$;
в) $\cos\alpha > 0$; г) $\cos\alpha < 0$?

Решение. а), б) Поскольку $\sin\alpha > 0$ при $0 < \alpha < \pi$ и $\sin\alpha < 0$ при $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то с учетом условия имеем $\sin\alpha > 0$ при $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha < \pi$ и $\sin\alpha < 0$ при $\pi < \alpha \leqslant \frac{4\pi}{3}$.

в), г) Поясните решение самостоятельно (см. ответы).

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha < \pi$; б) $\pi < \alpha \leqslant \frac{4\pi}{3}$;
в) $\frac{\pi}{3} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$; г) $\pi < \alpha \leqslant \frac{4\pi}{3}$.

1. При каких значениях α выражение $\sin\alpha$ (выражение $\cos\alpha$) принимает наименьшее значение?
2. При каких значениях α выражение $\sin\alpha$ (выражение $\cos\alpha$) принимает наибольшее значение?
3. Назовите промежутки знакопостоянства для синуса (косинуса).
4. Назовите нули синуса (косинуса).
5. Верно ли, что $\sin(-\alpha)\cos(-\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha$?

Упражнения

2.56°. В какой четверти оканчивается угол α, если:

1) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$;
3) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$; 4) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$;
5) $\sin\alpha\cos\alpha > 0$; 6) $\sin\alpha\cos\alpha < 0$;
7) $\sin\alpha = |\sin\alpha|$; 8) $|\cos\alpha| = \cos\alpha$?

2.57°. Определите знаки значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для углов α, равных:

1) $49°$, $-250°$, $333°$, $-1324°$;

2) $-38°$, $189°$, $-297°$, $1585°$;

3) $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{19\pi}{18}$, $-\frac{17\pi}{9}$, $\frac{279\pi}{20}$;

4) $\frac{\pi}{14}$, $-\frac{23\pi}{17}$, $\frac{38\pi}{21}$, $-\frac{371\pi}{40}$;

5) 3,5; −4; 5,5; −8;

6) −2,5; 4,5; −6; 9.

2.58°. Может ли при некотором значении α быть верным равенство:

1) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$; 2) $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$;

3) $\cos\alpha=\frac{\pi}{3}$; 4) $\sin\alpha=-\frac{\pi}{2}$;

5) $\sin\alpha=\sqrt{3}-2$; 6) $\cos\alpha=1-\sqrt{2}$;

7) $\sin\alpha=\sqrt{11}-\sqrt{29}$; 8) $\cos\alpha=\sqrt{15}-\sqrt{12}$?

2.59°. При каких значениях t верно равенство:

1) $\sin t=1$; 2) $\sin t=0$; 3) $\sin t=-1$;

4) $\sin t=\pi$; 5) $\cos t=1$; 6) $\cos t=0$;

7) $\cos t=-1$; 8) $\cos t=-\frac{\pi}{2}$?

2.60°. Решите уравнение:

1) $\cos 2t=0$; 2) $\sin 3t=0$;

3) $\sin\frac{t}{4}=-1$; 4) $\cos\frac{t}{3}=-1$;

5) $\sin(6t-5)=0$; 6) $\cos(4-2t)=0$;

7) $\cos(10t+88\pi)=1$; 8) $\sin(6\pi-3t)=1$.

2.61. Сравните с нулем:

1) $\sin 1276°$, $\sin(-3461°)$, $\cos 2078°$, $\cos(-3065°)$;

2) $\sin(-1288°)$, $\sin 2039°$, $\cos 4742°$, $\cos(-2105°)$;

3) $\sin\frac{18\pi}{13}$, $\sin\left(-\frac{31\pi}{16}\right)$, $\cos\left(-\frac{25\pi}{13}\right)$, $\cos\frac{133\pi}{8}$;

4) $\sin\frac{37\pi}{9}$, $\sin\left(-\frac{17\pi}{13}\right)$, $\cos\frac{14\pi}{11}$, $\cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$;

5) $\sin 3{,}14$, $\sin(-25)$, $\cos(-6{,}1)$, $\cos 99$;

6) $\sin(-2{,}5)$, $\sin 41$, $\cos 4{,}7$, $\cos(-81)$.

Определите знак значения выражения **(2.62—2.63).**

2.62. 1) $\cos(\pi+2)$; 2) $\sin(\pi+1)$; 3) $\sin(\pi-2)$;

4) $\cos(\pi-1)$; 5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-1\right)$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\right)$;

7) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\right)$; 8) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\right)$.

2.63. 1) $\cos(-1250°)\sin(-3390°)$; 2) $\cos(-5431°)\sin(-679°)$;

3) $\sin 10\cos 16\cos 21$; 4) $\sin 11\cos 22\sin 33$;

5) $\frac{\sin 4\cos 5}{\sin(-2)}$; 6) $\frac{\cos 4{,}1\sin(-5{,}9)}{\cos 3{,}5}$.

2.64. Расположите в порядке убывания:

1) $\cos 3\pi$, $\cos 4\pi$, $\sin 3\pi$;

2) $\sin\frac{\pi}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{2}$, $\cos 2\pi$;

3) $\cos\frac{33\pi}{2}$, $\cos 29\pi$, $\sin\frac{73\pi}{2}$;

4) $\sin 101\pi$, $\cos 223\pi$, $\sin\frac{31\pi}{2}$.

2.65. Постройте углы α и β, оканчивающиеся в разных четвертях, для каждого из которых:

1) косинус равен $-\frac{2}{5}$; 2) косинус равен $\frac{2}{3}$;

3) синус равен $\frac{3}{5}$; 4) синус равен $-\frac{3}{4}$.

2.66. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $5\sin\alpha$; 2) $-7\cos\alpha$;

3) $-\cos\alpha+2$; 4) $3+\sin\alpha$;

5) $-\cos^2\alpha-8$; 6) $\sin^2\alpha-1$;

7) $-|-\cos\alpha|$; 8) $|\sin\alpha|$;

9) $\frac{1}{4+\sin\alpha}$; 10) $\frac{1}{5-\cos\alpha}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

2.67. Для каких значений α, удовлетворяющих условию $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{11\pi}{4}$, верно неравенство:

1) $\sin\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha < 0$; 3) $\cos\alpha > 0$; 4) $\cos\alpha < 0$?

2.68. Для каких значений α, удовлетворяющих условию $-\frac{13\pi}{6} < \alpha < -\frac{\pi}{6}$, верно неравенство:

1) $\sin\alpha > 0$; 2) $\sin\alpha < 0$; 3) $\cos\alpha > 0$; 4) $\cos\alpha < 0$?

2.69. Зная, что угол α оканчивается в IV четверти, упростите выражение:

1) $|\cos\alpha| - \cos\alpha$;

2) $|\sin\alpha| + \sin\alpha$;

3) $|\cos\alpha| + |\sin\alpha|$;

4) $|\cos\alpha| - |\sin\alpha|$;

5) $\left(\sqrt{\cos^2\alpha} - \sqrt{\sin^2\alpha}\right)(\cos\alpha + \sin\alpha)$;

6) $\left(\sqrt{\cos^2\alpha} + \sqrt{\sin^2\alpha}\right)(\cos\alpha - \sin\alpha)$.

2.6. Понятие арксинуса и арккосинуса

Пример 1. Пусть

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Верно ли, что:

а) если $\sin\alpha = \sin\beta$, то $\alpha = \beta$;

б) если $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha = \beta$?

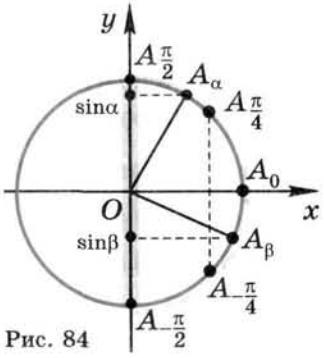


Рис. 84

Решение. а) Рассмотрим углы α и β, удовлетворяющие условию (1). Тогда, если $\alpha \neq \beta$, то $y_\alpha \neq y_\beta$ (рис. 84), т. е. если $\alpha \neq \beta$, то $\sin\alpha \neq \sin\beta$. Значит, если $\sin\alpha = \sin\beta$, то $\alpha = \beta$.

б) Углы $-\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{4}$ удовлетворяют условию (1). При этом

$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}, \text{ а } -\frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: а) да; б) нет.

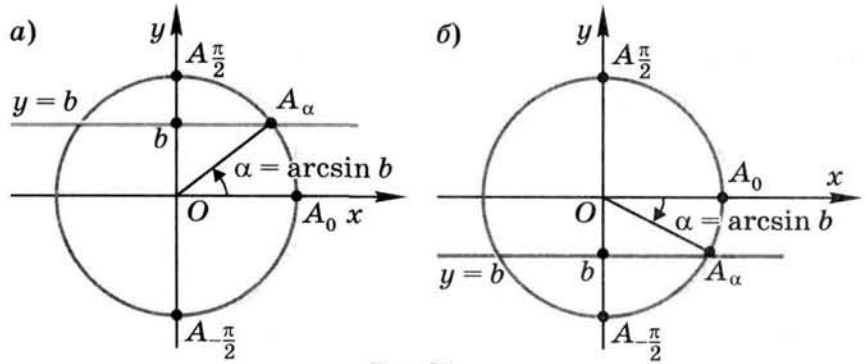


Рис. 85

Рассмотрим выражение $\sin\alpha$. Мы знаем, что оно может принимать каждое значение b из промежутка $[-1; 1]$; причем таких углов α, что $\sin\alpha = b$, бесконечно много. Однако существует единственный угол α, такой, что $\sin\alpha = b$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ (рис. 85; см. также пример 1). Этот угол называется ***арксинусом числа b***.

Определение. Пусть $b \in [-1; 1]$. *Арксинусом числа b* называется угол α, такой, что $\sin\alpha = b$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Арксинус числа b обозначается $\arcsin b$. Таким образом, $\arcsin b$ — это угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\sin(\arcsin b) = b \text{ и } -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin b \leqslant \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Арк — это часть латинского слова «arcus», которое в переводе означает «дуга», т. е. $\arcsin 0{,}8$ — сокращенная запись фразы «дуга, синус которой равен 0,8». Обозначение арксинуса — $\arcsin\alpha$, которое используется по сей день, ввел в 1772 г. французский астроном, математик и механик Жозеф Луи Лагранж (1736—1813).

Естественной областью определения выражения $\arcsin b$ является промежуток $[-1; 1]$.

Адукацыйны партал www.adu.by

Заметим, что здесь и в дальнейшем, как правило, используется радианная мера угла. Но можно, конечно, условие $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin b \leqslant \frac{\pi}{2}$ записать и так: $-90° \leqslant \arcsin b \leqslant 90°$.

Пример 2. Верно ли, что $\arcsin \frac{1}{2}$ равен:

а) $-\frac{5\pi}{6}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{6}$?

Решение. Согласно определению арксинус числа b — это угол, удовлетворяющий условиям (2). А этим условиям удовлетворяет только вариант г), т. е. $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: а), б), в) нет; г) да.

Пример 3. Пусть

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \pi \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi. \qquad (3)$$

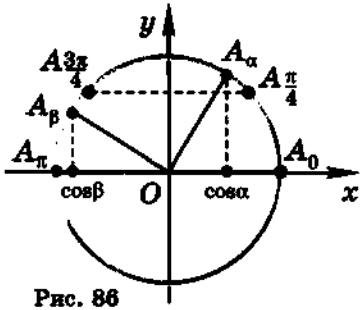


Рис. 86

Верно ли, что:

а) если $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha = \beta$;

б) если $\sin\alpha = \sin\beta$, то $\alpha = \beta$?

Решение.

Рассуждая аналогично как в примере 1 и используя рисунок 86, получаем **ответ:** а) нет; б) да.

Рассмотрим выражение $\cos\alpha$. Мы знаем, что оно может принимать каждое значение b из промежутка $[-1; 1]$; причем таких углов α, что $\cos\alpha = b$, бесконечно много. Однако существует единственный угол α, такой, что $\cos\alpha = b$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ (рис. 87; см. также пример 3). Этот угол называется ***арккосинусом числа b***.

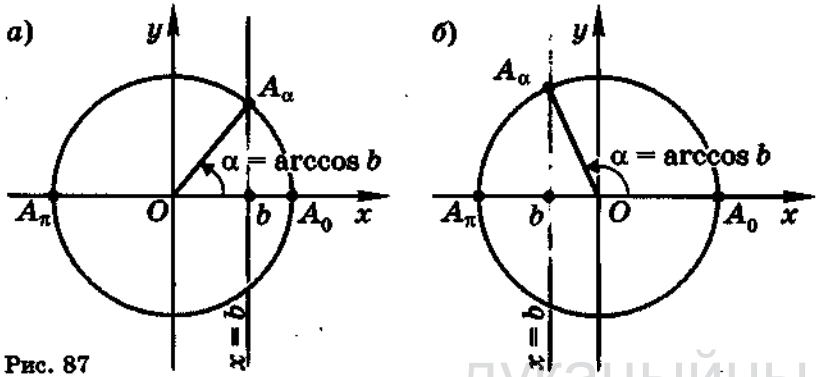


Рис. 87

Определение. Пусть $b \in [-1; 1]$. *Арккосинусом числа b* называется угол α, такой, что $\cos\alpha = b$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

Арккосинус числа b обозначается $\arccos b$.

Таким образом, $\arccos b$ — это угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\cos(\arccos b) = b \text{ и } 0 \leqslant \arccos b \leqslant \pi. \qquad (4)$$

Естественной областью определения выражения $\arccos b$ является промежуток $[-1; 1]$.

Пример 4. Верно ли, что $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ равен:

а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{2\pi}{3}$; г) $-\frac{\pi}{3}$?

Решение.

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

(объясните почему, см. пример 2).

Ответ: а), б), г) нет; в) да.

Пример 5. Доказать тождество:

а) $\arccos(-b) = \pi - \arccos b$;

б) $\arcsin(-b) = -\arcsin b$.

Доказательство. а) Рассмотрим углы в левой и в правой частях данного равенства. Во-первых, эти углы удовлетворяют условию (3):

$$0 \leqslant \arccos(-b) \leqslant \pi;\ 0 \leqslant \pi - \arccos b \leqslant \pi$$

(объясните почему).

Во-вторых, косинусы этих углов равны:

$$\cos(\arccos(-b)) = -b;$$

$$\cos(\pi - \arccos b) = -\cos(\arccos b) = -b.$$

Значит, эти углы равны (см. пример 3, а) ☒.

б) Докажите это тождество самостоятельно.

Пример 6. Найти значение выражения A, если

$$A = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решение. $A = -\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (поясните почему).

Ответ: $A = \frac{\pi}{2}$.

дукацыйны партал www.adu.by

Пример 7. Найти значение выражения A, если

$$A=\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Решение. Пусть $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)=\alpha$, тогда $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Найдем $A=\sin\alpha$.

Из основного тригонометрического тождества имеем: $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$. Откуда получаем:

$$|\sin\alpha|=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Так как $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$, то $\sin\alpha\geqslant 0$, и, значит,

$$|\sin\alpha|=\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Пример 8. Найти значение выражения:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$; б) $\arcsin(\sin 4)$.

Решение. а) $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\arcsin\left(\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$ $=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, так как $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

б) $\arcsin(\sin 4)=\arcsin(\sin(\pi-4))=\pi-4$, так как $\pi-4\approx 3{,}14-$ $-4=-0{,}86$, т. е. $-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-4\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $\sin(\pi-4)=\sin 4$.

Ответ: а) $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin(\sin 4)=\pi-4$.

1. Сформулируйте определения арксинуса и арккосинуса числа b.
2. Укажите область определения выражения:
   а) $\arcsin x$; б) $\arccos x$.
3. Почему:
   а) $\arcsin(\sin 4)\neq 4$;
   б) $\arcsin(\sin -1{,}3)=-1{,}3$;
   в) $\arccos(\cos 3)=3$;
   г) $\arccos(\cos -1{,}2)\neq -1{,}2$?

Упражнения

2.70°. Запишите равенство, равносильное данному, по образцу:

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *равносильно* $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$.

1) $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos\frac{\pi}{2}=0$; 4) $\sin\frac{\pi}{2}=1$;

5) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

7) $\cos\pi=-1$; 8) $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$.

2.71°. Запишите равенство, равносильное данному, по образцу:

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$ *равносильно* $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$;

3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$; 4) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

5) $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$; 6) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$;

7) $\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$; 8) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$.

2.72°. При каких значениях t имеет смысл выражение:

1) $\arcsin(t+1)$; 2) $\arccos(t+3)$;
3) $\arccos t^2$; 4) $\arcsin t^4$;
5) $\arcsin\sqrt{t+1}$; 6) $\arccos\sqrt{t-3}$?

Найдите значение выражения (2.73—2.74).

2.73°. 1) $\arccos 0+\frac{\pi}{4}$; 2) $\arcsin(-1)+\frac{5\pi}{2}$;

3) $\arcsin 1+\frac{7\pi}{2}$; 4) $\arccos(-1)+\frac{3\pi}{4}$.

2.74°. 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin(-1)$;

2) $\arccos(-1)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\arccos 0-\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

4) $4\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$;

дукацыйны партал www.adu.by

5) $3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+4\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\arccos 1$;

6) $\arcsin(-1)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-2\arccos(-1)$.

2.75°. Верно ли, что:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{4}\right)=-\arcsin\frac{1}{4}$; 2) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)=\pi-\arccos\frac{2}{3}$;

3) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)=\arccos\frac{4}{5}$; 4) $\arcsin\left(-\frac{4}{7}\right)=\arcsin\frac{4}{7}$?

2.76. Упростите выражение:

1) $\arcsin(-b)+\arcsin b$; 2) $\arcsin(-b)-\arcsin b$;

3) $\arccos(-b)-\arccos b$; 4) $\arccos b-\arccos(-b)$.

2.77. Сравните:

1) $\arcsin 1$ и $\arccos 1$;

2) $\arcsin(-1)$ и $\arccos(-1)$;

3) $\arccos 0$ и $\arcsin 1$;

4) $\arccos(-1)$ и $\arcsin 0$;

5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.78. Найдите значение выражения $\arccos t+2t-t\arcsin t$ при t, равном:

1) -1; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$;

5) 0; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдите значение выражения A (2.79—2.82).

2.79. 1) $A=\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$; 2) $A=\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

3) $A=\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$; 4) $A=\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

5) $A=\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $A=\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$.

2.80*. 1) $A=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $A=\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $A=\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 4) $A=\arcsin\left(\sin\frac{6\pi}{5}\right)$;

5) $A=\arccos(\cos 8\pi)$; 6) $A=\arccos(\cos 9\pi)$;

7) $A=\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$; 8) $A=\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)$.

2.81*. 1) $A=\arccos\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{12}\right)\right)$; 2) $A=\arccos\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right)$;

3) $A=\arcsin\left(\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)\right)$; 4) $A=\arcsin\left(\sin\left(-\frac{6\pi}{5}\right)\right)$;

5) $A=\arccos\left(\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right)$; 6) $A=\arccos\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{5}\right)\right)$.

2.82*. 1) $A=\arcsin(\sin 3)$; 2) $A=\arcsin(\sin 2)$;

3) $A=\arcsin(\sin 12)$; 4) $A=\arcsin(\sin 11)$;

5) $A=\arccos(\cos(-2{,}5))$; 6) $A=\arccos(\cos(-1{,}6))$.

2.7. Тангенс и котангенс произвольного угла

Определение. Пусть $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$. Тангенсом угла α называется отношение синуса угла α к косинусу того же угла α:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

(Запись $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, означает, что радианная мера угла α не равна $\frac{\pi}{2}+\pi n$ ни при каком целом n.)

Определение. Пусть $\alpha\neq\pi n$, $n\in Z$. Котангенсом угла α называется отношение косинуса угла α к синусу того же угла α:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Когда углы измеряются в радианах, то при записи тангенса и котангенса этих углов наименование «радиан» опускается.

Для нахождения значений тангенсов и котангенсов углов можно использовать тригонометрическую окружность, таблицы, микрокалькуляторы и т. д.

Каждый угол α можно представить в виде

$\alpha=2\pi n+\varphi$, где $n\in Z$, $0\leqslant\varphi<2\pi$ (см. п. 2.3).

дукацыйны партал www.adu.by

Так как углы α и φ отличаются на целое число полных оборотов, то точки A_α и A_φ на тригонометрической окружности совпадают. Поэтому верны равенства:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\varphi,$$
$$\operatorname{tg}(2\pi n + \varphi) = \operatorname{tg}\varphi,\ \operatorname{ctg}(2\pi n + \varphi) = \operatorname{ctg}\varphi, \text{ где } n \in Z.$$

Для всех значений α, для которых определены выражения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, т. е. для $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, верно равенство

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Таким образом, это равенство является тождеством.

Проведем через точку $A_0(1; 0)$ прямую t перпендикулярно оси Ox (рис. 88). Она будет касательной к единичной окружности. Эта прямая t называется ***линией тангенсов***. Если $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, то прямая OA_α пересекает линию тангенсов t в точке T_α. Ордината точки T_α равна $\operatorname{tg}\alpha$.

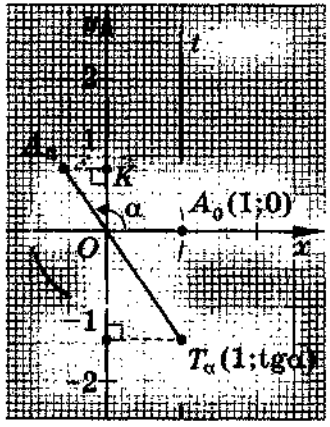


Рис. 88

▲Докажите, что ордината точки T_α равна $\operatorname{tg}\alpha$ (воспользуйтесь рисунком 88). ▲

Аналогично тому, как это было сделано для тангенса, построим и линию котангенсов.

Через точку $A_{\frac{\pi}{2}}(0; 1)$ проведем прямую c перпендикулярно оси Oy. Она будет касательной к единичной окружности (рис. 89).

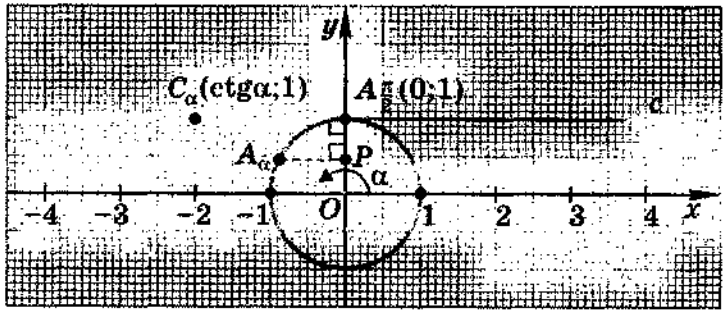


Рис. 89

Эта прямая c называется ***линией котангенсов***. Если $\alpha \neq \pi n$, $n \in Z$, то прямая OA_α пересекает линию котангенсов в точке C_α. Абсцисса точки C_α равна $\operatorname{ctg}\alpha$ (см. рис. 89).

▲ Докажите, что абсцисса точки C_α равна $\operatorname{ctg}\alpha$ (воспользуйтесь рисунком 89). ▲

Рассмотрим теперь свойства тангенса и котангенса.

1. Множество значений тангенса и котангенса

Выражение $\operatorname{tg}\alpha$ может принимать любые значения из множества R. В самом деле, для любого действительного числа p существует такой угол α, что $\operatorname{tg}\alpha = p$. Это можно показать, используя линию тангенсов (убедитесь в этом самостоятельно).

Таким образом, мы установили, что *множеством значений выражения $\operatorname{tg}\alpha$ является множество всех действительных чисел R.*

Следовательно, выражение $\operatorname{tg}\alpha$ *не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.*

Аналогичные утверждения верны для выражения $\operatorname{ctg}\alpha$ (проведите рассуждения самостоятельно).

Можно доказать, что для любого $p \in R$ существуют такие углы α и β $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2};\ 0 < \beta < \pi\right)$, что $\operatorname{tg}\alpha = p$ и $\operatorname{ctg}\beta = p$.

2. Нули тангенса и котангенса

Очевидно, что $\operatorname{tg}\alpha = 0$, если $\sin x = 0$, т. е. при $\alpha = \pi n$, $n \in Z$. *Значения $\alpha = \pi n$, $n \in Z$, являются нулями тангенса.*

Аналогично $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, — нули котангенса (поясните почему).

3. Промежутки знакопостоянства тангенса и котангенса

Используя определение тангенса и знаки значений выражений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, можно установить знаки значений выражения $\operatorname{tg}\alpha$. Например, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$, и, значит, $\operatorname{tg}\alpha < 0$. Можно установить знаки значений выражения $\operatorname{tg}\alpha$ и с помощью линии тангенса (убедитесь в этом).

Аналогичными способами определяют и знаки значений выражения $\operatorname{ctg}\alpha$.

Адукацыйны партал www.adu.by

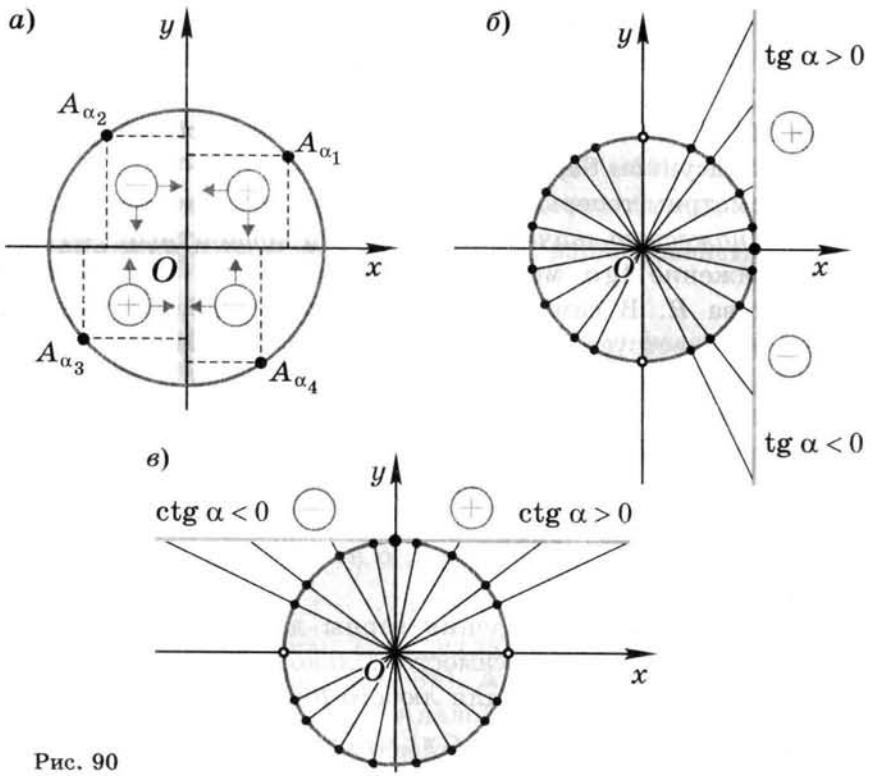


Рис. 90

На рисунке 90 указаны знаки значений тангенса и котангенса α в зависимости от того, в какой четверти оканчивается угол α.

Таким образом,

если угол α оканчивается в I *или в* III *четверти, т. е.*

$$\pi n < \alpha < \frac{\pi}{2} + \pi n \ (n \in \boldsymbol{Z}),$$

то $\operatorname{tg}\alpha > 0$ *и* $\operatorname{ctg}\alpha > 0$;

если угол α оканчивается во II *или в* IV *четверти, т. е.*

$$\frac{\pi}{2} + \pi n < \alpha < \pi + \pi n \ (n \in \boldsymbol{Z}),$$

то $\operatorname{tg}\alpha < 0$ *и* $\operatorname{ctg}\alpha < 0$.

Итак, мы установили ***промежутки знакопостоянства тангенса и котангенса.***

Пример 1. Доказать тождество:

а) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$;
в) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Доказательство. а) По определению тангенса

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha. \ \boxtimes$$

б), в), г) Доказательства аналогичны доказательству случая а) — выполните их самостоятельно.

Пример 2. Сравнить с нулем значение выражения:

а) $\operatorname{tg}(-3986^\circ)$; б) $\operatorname{ctg}10$.

Решение. а) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-3986^\circ) = \operatorname{tg}334^\circ < 0$.

б) Пусть $10 = 2\pi + \varphi$; тогда $\varphi = 10 - 2\pi \approx 10 - 6{,}28 = 3{,}72$; угол φ принадлежит III четверти. Таким образом, $\operatorname{ctg}10 \approx \operatorname{ctg}3{,}72 > 0$.

Ответ: а) $\operatorname{tg}(-3986^\circ) < 0$; б) $\operatorname{ctg}10 > 0$.

Пример 3. Доказать, что значения выражений $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ не могут быть одновременно больше единицы.

Доказательство. Если $\operatorname{tg}\alpha > 1$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} < 1$. $\boxtimes$

В IX в. арабский астроном и математик аль-Баттани ввел новую тригонометрическую величину, которую он назвал «тенью». Он рассматривал величину отношения высоты предмета к длине тени от этого предмета при различной высоте солнца (рис. 91). Таким образом, аль-Баттани, по сути, ввел в тригонометрию понятие «тангенс».

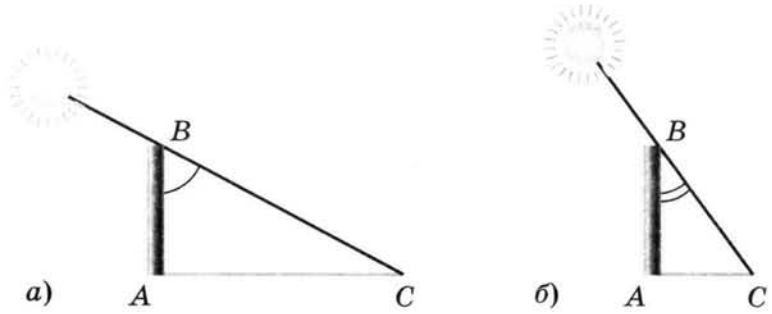


Рис. 91

дукацыйны партал www.adu.by

Современное определение тангенса и его обозначение $\operatorname{tg}\alpha$ в 1753 г. ввел Леонард Эйлер.
Латинское слово tangens означает «касательная».

1. Докажите тождество $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$.
2. Укажите промежутки знакопостоянства тангенса (котангенса). Ответ обоснуйте.
3. Почему при любом значении $\alpha \neq \frac{\pi}{2}k$, $k \in Z$, знаки $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ одинаковы?
4. Укажите нули тангенса (котангенса).
5. Верно ли, что $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha) = -1$?
6*. Докажите, что значение тангенса (котангенса) может быть любым действительным числом.

Упражнения

2.83°. Могут ли синус, косинус и тангенс одного угла α иметь следующие значения:

1) $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$;

2) $\sin\alpha = \frac{7}{11}$, $\cos\alpha = \frac{5\sqrt{3}}{11}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{5\sqrt{3}}$;

3) $\sin\alpha = \frac{8}{9}$, $\cos\alpha = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{4\sqrt{5}}$;

4) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$?

2.84°. Верно ли, что:

1) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}(-\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$?

2.85°. Используя рисунки 88 и 89, найдите приближенные значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ при α, равном:

1) 230°, 335°, –220°, –1040°;
2) 210°, 125°, –295°, –1030°;
3) $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{74\pi}{8}$;
4) $\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $\frac{44\pi}{3}$, $-\frac{19\pi}{8}$.

2.86°. В какой четверти оканчивается угол α, если:

1) $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha < 0$; 2) $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha > 0$; 3) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha < 0$;
4) $\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha > 0$; 5) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha > 0$; 6) $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha < 0$?

2.87°. Определите знак значения выражения, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$:

1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$; 5) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.

2.88°. Верно ли, что:

1) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 2) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$?

Определите знак значения выражения (2.89—2.90).

2.89. 1) $\operatorname{tg}(-340°)\operatorname{ctg}156°$; 2) $\operatorname{ctg}103°\operatorname{ctg}(-304°)$;
3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{11}\right)\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{15\pi}{7}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$;
5) $\operatorname{ctg}(-1)\operatorname{tg}(-2)\operatorname{ctg}3$; 6) $\operatorname{tg}(-4)\operatorname{ctg}2\operatorname{tg}(-5)$.

2.90. 1) $-\operatorname{tg}189° - \operatorname{tg}269°$; 2) $-\operatorname{ctg}85° - \operatorname{ctg}295°$;
3) $\operatorname{tg}5 - \operatorname{ctg}5$; 4) $\operatorname{tg}1 - \operatorname{tg}3$;
5) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{9} - \operatorname{tg}\frac{25\pi}{18}$; 6) $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{15} - \operatorname{tg}\frac{49\pi}{45}$.

2.91°. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;
2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;
3) $\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$;
4) $\operatorname{tg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}^2\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$.

2.92. Зная, что $\operatorname{tg}\beta = m$ и $m \neq 0$, найдите значение выражения:

1) $1 - \operatorname{ctg}(-\beta)$; 2) $1 - \operatorname{tg}(-\beta)$;
3) $1 - \operatorname{tg}(2\pi - \beta)$; 4) $1 - \operatorname{ctg}(\beta - 2\pi)$.

2.93. Известно, что $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, упростите выражение:

1) $|\operatorname{tg}\alpha| + \operatorname{tg}\alpha$; 2) $|\operatorname{ctg}\alpha| + \operatorname{ctg}\alpha$;

Адукацыйны партал www.adu.by

3) $|\operatorname{ctg}(-\alpha)|+\operatorname{ctg}(-\alpha)$; 4) $|\operatorname{tg}(-\alpha)|+\operatorname{tg}(-\alpha)$;

5) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\alpha-1$; 6) $\operatorname{tg}(-\alpha)\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha}-1$.

2.94. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}t=0$; 2) $\operatorname{ctg}t=0$;

3) $\operatorname{tg}(4t-2)=0$; 4) $\operatorname{tg}(3t+4)=0$;

5) $\operatorname{ctg}(0{,}1t+6)=0$; 6) $\operatorname{ctg}(2t-5)=0$.

2.95. При каких значениях t не имеет смысла выражение:

1) $\operatorname{tg}\left(2t+\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{tg}5t}$;

4) $\frac{\sqrt{6}}{\operatorname{ctg}(-t)}$; 5) $\frac{\pi}{\operatorname{tg}\left(\frac{3t}{4}+3\right)}$; 6) $\frac{2\pi+6}{\operatorname{ctg}\left(6t-\frac{5\pi}{6}\right)}$?

2.96. Упростите выражение:

1) $\sin\alpha\operatorname{ctg}(-\alpha)-\cos(-\alpha)$;

2) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha-\sin(-\alpha)$;

3) $\cos^2(-\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{ctg}^2(-\alpha)$;

4) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}(-\alpha)$;

5) $(\operatorname{tg}(-\alpha)+\operatorname{tg}(-\beta)):(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)$;

6) $(1+\operatorname{tg}^4(-\alpha)):(\operatorname{tg}^2(-\alpha)+\operatorname{ctg}^2(-\alpha))$.

2.97. Пусть $k\in R$. Постройте угол α, такой, что $\operatorname{tg}\alpha=k$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, если k равно:

1) 0,2; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $-2\frac{1}{2}$; 4) $\frac{24}{7}$.

2.98. Пусть $k\in R$. Постройте угол α, такой, что $\operatorname{ctg}\alpha=k$, $0<\alpha<\pi$, если k равно:

1) 0,4; 2) $-\frac{5}{6}$; 3) $-2\frac{1}{4}$; 4) $\frac{37}{9}$.

2.99*. Докажите, что значение выражения $\operatorname{tg}\alpha$ может быть:

1) больше 7; 2) меньше -4;

3) меньше -10; 4) больше 11.

2.8. Понятие арктангенса и арккотангенса

Рассмотрим выражение $\operatorname{tg}\alpha$. Мы знаем, что оно может принимать каждое действительное значение b, причем таких углов α, что $\operatorname{tg}\alpha=b$, бесконечно много. Однако существует единственный угол α, такой, что $\operatorname{tg}\alpha=b$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ($b>0$ на рисунке 92, *а*; $b<0$ на рисунке 92, *б*). Этот угол называется ***арктангенсом числа b***.

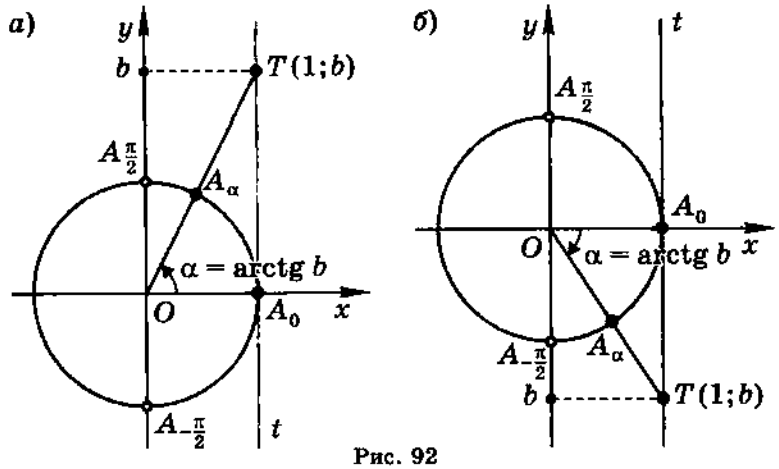


Рис. 92

Определение. Пусть $b\in R$. *Арктангенсом числа b* называется угол α, такой, что

$$\operatorname{tg}\alpha=b \text{ и } -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}.$$

Арктангенс числа b обозначается $\operatorname{arctg}b$. Таким образом, $\operatorname{arctg}b$ — это угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}b)=b \text{ и } -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}b<\frac{\pi}{2}.$$

Естественной областью определения выражения $\operatorname{arctg}b$ является множество действительных чисел R.

Пример 1. Найти значение выражения A, если:

а) $A=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $A=\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

дукацыйны партал www.adu.by

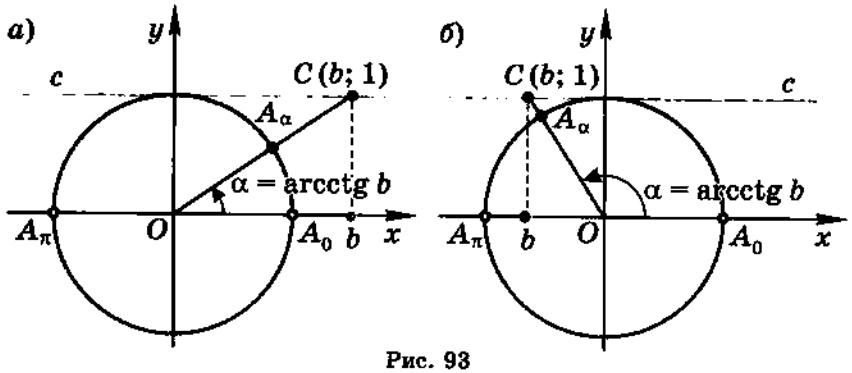


Рис. 93

Решение. а) $A = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) $A = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{-2\pi + 3\pi + 4\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$ (поясните почему).

Ответ: а) $A = -\frac{\pi}{6}$; б) $A = \frac{5\pi}{12}$.

Рассмотрим выражение $\operatorname{ctg}\alpha$. Мы знаем, что оно может принимать каждое действительное значение b, причем таких углов α, что $\operatorname{ctg}\alpha = b$, бесконечно много. Однако существует единственный угол α, такой, что $\operatorname{ctg}\alpha = b$ и $0 < \alpha < \pi$ ($b > 0$ на рисунке 93, *а*; $b < 0$ на рисунке 93, *б*). Этот угол называется ***арккотангенсом числа b***.

Определение. Пусть $b \in R$. *Арккотангенсом числа b* называется угол α, такой, что

$$\operatorname{ctg}\alpha = b \text{ и } 0 < \alpha < \pi.$$

Арккотангенс числа b обозначается $\operatorname{arcctg} b$. Таким образом, $\operatorname{arcctg} b$ — это угол, удовлетворяющий двум условиям:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} b) = b \text{ и } 0 < \operatorname{arcctg} b < \pi.$$

Естественной областью определения выражения $\operatorname{arcctg} b$ является множество действительных чисел R.

Пример 2. Найти значение выражения A, если:

а) $A = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; б) $A = \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$.

Решение. а) $A = \frac{2\pi}{3}$, так как $0 < \frac{2\pi}{3} < \pi$ и $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) $A = \frac{5\pi}{6} + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{5\pi - 2\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ (поясните почему).

Ответ: а) $A = \frac{2\pi}{3}$; б) $A = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Найти значение выражения A, если:

а) $A = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} 3)$; б) $A = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} 7) + \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{6}{7}\right)$.

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 3 = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 3$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найдем значение A:

$$A = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{3}.$$

б) Пусть $\operatorname{arcctg} 7 = \alpha$, $\operatorname{arcctg}\frac{6}{7} = \beta$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha = 7$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{6}{7}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ (поясните эти неравенства). Найдем значение A:

$$A = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} + \operatorname{ctg}\beta = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = 1.$$

Ответ: а) $A = \frac{1}{3}$; б) $A = 1$.

Пример 4. Доказать тождество:

а) $\operatorname{arctg}(-b) = -\operatorname{arctg} b$;
б) $\operatorname{arcctg}(-b) = \pi - \operatorname{arcctg} b$.

Доказательство. а) Рассмотрим углы, стоящие в левой и в правой частях данного равенства. Во-первых, эти углы удовлетворяют условию:

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(-b) < \frac{\pi}{2}; \qquad -\frac{\pi}{2} < -\operatorname{arctg} b < \frac{\pi}{2}$$

(объясните почему).

Во-вторых, тангенсы этих углов равны:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-b)) = -b;$$

$$\operatorname{tg}(-\operatorname{arctg} b) = -\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} b) = -b.$$

Значит, эти углы равны (см. рис. 92).

б) Доказательство аналогичное а), — проведите его самостоятельно (см. также пример 5 в п. 2.6). ☒

Адукацыйны партал www.adu.by

1. Сформулируйте определения арктангенса и арккотангенса числа b.
2. Укажите область определения выражения:
   а) $\operatorname{arctg} x$; б) $\operatorname{arcctg} x$.
3. Укажите тождество, которое следует из определения:
   а) арктангенса; б) арккотангенса.

Упражнения

2.100°. Запишите равенство, равносильное данному, по образцу:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1 \text{ } \textit{равносильно} \text{ } \operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$;

4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$; 5) $\operatorname{tg}0=0$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$;

7) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$; 8) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.101°. Запишите равенство, равносильное данному, по образцу:

$$\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4} \text{ } \textit{равносильно} \text{ } \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}=-1.$$

1) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\pi}{3}$; 2) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$; 4) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$;

5) $\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

2.102°. Верно ли, что:

1) $\operatorname{arctg}(-2)=-\operatorname{arctg}2$;

2) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{5}{2}\right)=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{5}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-7)=\operatorname{arctg}7$;

4) $\operatorname{arcctg}(-10)=\pi+\operatorname{arcctg}10$?

2.103°. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}0+3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$;

2) $A=\operatorname{arcctg}\sqrt{3}+\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

3) $A=\operatorname{arctg}(-1)+2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-3\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}(-1)$;

4) $A=\operatorname{arctg}0+\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arcctg}0$;

5) $A=\operatorname{tg}\left(\arccos 1-2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$;

6) $A=\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arcctg}1+3\operatorname{arctg}0+\arcsin(-1)\right)$.

2.104. Сравните значения выражений:

1) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\operatorname{arctg}1$;

2) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\operatorname{arcctg}(-1)$;

4) $\operatorname{arctg}0$ и $\operatorname{arcctg}(-1)$;

5) $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$ и $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

6) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.105. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3{,}7)$;

2) $A=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}9{,}2)$;

3) $A=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{5}\right)\right)$;

4) $A=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{9}{8}\right)\right)$;

5) $A=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-4))$;

6) $A=\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-5))$.

2.106. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-2))+\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-3))$;

2) $A=\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}(-5))-\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}(-4))$.

2.107*. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8}\right)$; 2) $A=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{15\pi}{7}\right)$;

3) $A=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)\right)$; 4) $A=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right)$;

5) $A=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8}\right)$; 6) $A=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}\right)$.

Адукацыйны партал www.adu.by

2.9. Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла

Рассмотрим основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1. \qquad (1)$$

Зная, в какой четверти оканчивается угол α, и зная значение $\sin\alpha$, из этого тождества можно найти значение $\cos\alpha$, поскольку $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$. И наоборот, зная значение $\cos\alpha$, можно найти значение $\sin\alpha$, так как $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$. Например, если угол α оканчивается в IV четверти, то получим:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha};\qquad \sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

(поясните почему).

Если $\cos\alpha\neq 0$, то, разделив обе части тождества (1) на $\cos^2\alpha$, получим $\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, т. е. новое тождество

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

которое устанавливает связь между косинусом и тангенсом одного угла.

Если известно, в какой четверти оканчивается угол α, то это тождество позволяет по значению $\operatorname{tg}\alpha$ найти значение $\cos\alpha$, и наоборот.

Если $\sin\alpha\neq 0$, то, разделив обе части тождества (1) на $\sin^2\alpha$, получим $\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, т. е. еще одно тождество

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

которое устанавливает связь между синусом и котангенсом одного угла.

Зная значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, можно найти значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Из тождества $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$ имеем

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Таким образом, если известно, в какой четверти оканчивается угол α, то, используя указанные тождества, можно

по значению одного из выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$ найти значения трех остальных.

Пример 1. Найти $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

Решение. Из основного тригонометрического тождества имеем $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$. Отсюда получим $|\cos\alpha|=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Так как $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ (угол α принадлежит II четверти), то $\cos\alpha<0$, и, значит, $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. По определениям тангенса и котангенса имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{3}:\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-2\sqrt{2}.$$

Ответ: $\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-2\sqrt{2}$.

Пример 2. Найти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

Решение. Имеем: $\operatorname{ctg}\alpha=7$;

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+\operatorname{tg}^2\alpha=1+\frac{1}{49}=\frac{50}{49}.$$

Следовательно, $\cos^2\alpha=\frac{49}{50}$, откуда

$$|\cos\alpha|=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

Поскольку α принадлежит III четверти и $\cos\alpha<0$, то

$$\cos\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

Находим $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\frac{49}{50}=\frac{1}{50}$, откуда получаем $|\sin\alpha|=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$. Поскольку α принадлежит III четверти и $\sin\alpha<0$, то $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

Ответ: $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{10}$; $\cos\alpha=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$; $\operatorname{ctg}\alpha=7$.

▲**Пример 3.** Найти значение выражения A, если:

а) $A=\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; б) $A=\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$; в) $A=\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

Адукацыйны партал www.adu.by

Решение. Пусть $\arcsin\frac{1}{3}=\alpha$, тогда $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ и $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, и, следовательно, получим:

а) $A=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

б) $A=\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{3}:\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$;

в) $A=\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=2\sqrt{2}$.

Ответ: а) $A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $A=\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $A=2\sqrt{2}$.

(Сравните решение этого примера с решением примера 1. В чем отличие?)

Пример 4. Найти значение выражения A, если:

а) $A=\sin(\operatorname{arcctg}7)$; б) $A=\cos(\operatorname{arcctg}7)$; в) $A=\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}7)$.

Решение. Пусть $\operatorname{arcctg}7=\alpha$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha=7$ и $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, и, следовательно, $\sin\alpha>0$, $\cos\alpha>0$ и $\operatorname{tg}\alpha>0$. Таким образом, получим:

а) $A=\sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+49}}=\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$;

б) $A=\cos\alpha=\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$;

в) $A=\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1}{7}$.

Ответ: а) $A=\frac{\sqrt{2}}{10}$; б) $A=\frac{7\sqrt{2}}{10}$; в) $A=\frac{1}{7}$.

(Сравните решение этого примера с решением примера 2. В чем отличие?) ▲

Пример 5. Доказать, что если $a^2+b^2=1$, то существует угол α такой, что $\sin\alpha=a$ и $\cos\alpha=b$.

Доказательство выполните самостоятельно, рассмотрев на тригонометрической окружности точку с координатами a и b.

1. Докажите тождество:
   а) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$; б) $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$;
   в) $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$.
2. Как выразить $|\sin\alpha|$ через: а) $\cos\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$?
3. Как выразить $|\cos\alpha|$ через: а) $\sin\alpha$; б) $\operatorname{tg}\alpha$; в) $\operatorname{ctg}\alpha$?
4. Что нужно знать, чтобы из основного тригонометрического тождества выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$?

Упражнения

2.108°. По заданному значению одного из выражений $\sin\beta$, $\cos\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$ найдите значения трех остальных, если $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$:

1) $\sin\beta=0{,}8$; 2) $\sin\beta=\frac{1}{3}$;
3) $\cos\beta=-\frac{1}{4}$; 4) $\cos\beta=-\frac{40}{41}$;
5) $\operatorname{tg}\beta=-3$; 6) $\operatorname{tg}\beta=-2$;
7) $\operatorname{ctg}\beta=-2{,}4$; 8) $\operatorname{ctg}\beta=-0{,}5$.

2.109°. По заданному значению одного из выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ найдите значения трех остальных:

1) $\sin\alpha=\frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
2) $\sin\alpha=-\frac{7}{25}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
3) $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
4) $\cos\alpha=-\frac{84}{85}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
5) $\operatorname{ctg}\alpha=-0{,}4$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;
6) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{8}{15}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Упростите выражение **(2.110—2.111).**

2.110°. 1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\alpha$;
3) $\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha$; 4) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha$;
5) $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-\cos\alpha$; 6) $\frac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}+\sin\alpha$;
7) $\cos^2\alpha-(\operatorname{ctg}^2\alpha+1)\sin^2\alpha$;
8) $(\operatorname{tg}^2\alpha+1)\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

2.111°. 1) $\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}$; 2) $\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha-1}$;
3) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$; 4) $\frac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;
5) $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$; 6) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{1-2\sin\alpha\cos\alpha}$;
7) $\frac{1}{1+\sin\alpha}+\frac{1}{1-\sin\alpha}$; 8) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

2.112. Найдите значение выражения:

1) $\frac{1-2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

2) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$;

3) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$;

4) $\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ при $\alpha=-\frac{\pi}{3}$;

6) $\operatorname{tg}\alpha+\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$ при $\alpha=-\frac{\pi}{4}$.

Упростите выражение **(2.113—2.114)**.

2.113. 1) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$;

2) $\sin^2\alpha-\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$;

3) $\frac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}-\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$;

4) $\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha$;

5) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$;

6) $2(\sin^6\alpha+\cos^6\alpha)-3(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)+\sin\alpha+1$.

2.114. 1) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, если $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

3) $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

4) $\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$, если $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

2.115. Докажите тождество:

1) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$;

4) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{1}{\sin^2\alpha}$;

5) $\frac{1-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}:\frac{1+\frac{1}{\cos\alpha}}{1+\frac{1}{\sin\alpha}}=\operatorname{ctg}^3\alpha$;

6) $\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha-1}{1-\cos^2\alpha}=-\frac{1}{\sin^2\alpha}$.

2.116. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\cos^2\alpha$;

2) $\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

3) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

4) $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-1$;

5) $\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}+3\cos\alpha\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;

6) $\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}-5\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

Решите уравнение **(2.117—2.118)**.

2.117. 1) $\cos3x\cos(-2x)=0$; 2) $\sin4x\sin(-5x)=0$;

3) $\sin(-3x)\cos(-6x)=0$; 4) $\sin(-2x)\cos(-5x)=0$;

5) $\sin^2x-\sin x=0$; 6) $\cos^2x+\cos x=0$;

7) $\operatorname{tg}(-3x)\operatorname{ctg}2x=0$; 8) $\operatorname{tg}4x\operatorname{ctg}(-8x)=0$.

2.118. 1) $\sin^2x+\cos^2x-\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x+\cos2x=0$;

2) $\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x-\sin^2x-\cos^2x+\sin4x=0$;

3) $\frac{1}{\cos^2x}-\operatorname{tg}^2x-\sin\frac{x}{2}=1$;

4) $\cos\frac{3x}{4}+\frac{1}{\sin^2x}-\operatorname{ctg}^2x=1$.

дукацыйны партал www.adu.by

2.10. Формулы приведения

Теорема. При любом α верны равенства:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha, \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha, \qquad (1)$$

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha, \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha, \qquad (2)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha, \qquad (3)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha, \qquad (4)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha, \qquad (5)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha, \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha, \qquad (6)$$

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha, \qquad \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha. \qquad (7)$$

Доказательство. Формулы (7) можно записать в виде $\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ и $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$. Таким образом, формулы (7) и (1) были доказаны (см. пример 4, п. 2.4) с использованием симметрии точек единичной окружности. Аналогично можно доказать и формулы (2).

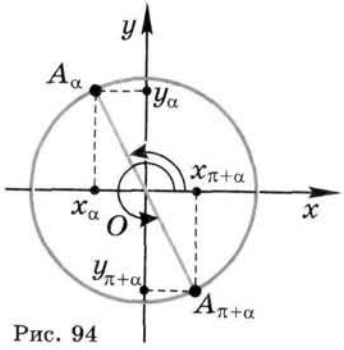


Рис. 94

В самом деле, точки единичной окружности A_α и $A_{\pi+\alpha}$ (рис. 94) при любом α симметричны относительно начала координат. Значит,

$$y_{\pi+\alpha}=-y_\alpha \text{ и } x_{\pi+\alpha}=-x_\alpha.$$

По определению синуса и косинуса имеем

$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \text{ и}$$
$$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$

Формулы (3) были доказаны в п. 2.1 для острого угла α. Полагая их верными для любых значений α (это будет доказано в п. 2.11) и используя формулы (1), (2), (3) и (7), можно обосновать и формулы (4)—(6).

Например,

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\left(2\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=$$

↓ по формулам (7) имеем ↓

$$=-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=$$

↓ по формулам (3) получим ↓

$$=-\cos\alpha. \ \boxtimes$$

Проведите доказательство оставшихся формул самостоятельно.

В п. 2.4 было показано, что вычисление значения тригонометрического выражения для любого угла можно свести к вычислению его значения для угла в пределах от 0 до 2π радиан. Формулы (1)—(7) позволяют ограничиться при вычислениях даже углами α из I четверти.

Формулы (1)—(7) называют ***формулами приведения***.

Любая из формул приведения может быть записана и для градусной меры угла. Например, формулы (5) можно записать в виде $\sin(270^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$ и $\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$.

Пример 1. Найти значение выражения $\cos\frac{183\pi}{4}$.

Решение.

$$\cos\frac{183\pi}{4}=\cos\left(45\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(2\pi\cdot 22+\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{4}\right)=$$

↓ применив формулу приведения (2) для косинуса, получим ↓

$$=-\cos\frac{3\pi}{4}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

↓ применив формулу приведения (4) для косинуса, имеем ↓

$$=-\left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Формулы приведения для тангенса и котангенса являются следствиями формул приведения для синуса и косинуса. Например,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

дукацыйны партал www.adu.by

Если записать все формулы приведения, подобные формулам (1)—(7), для четырех тригонометрических выражений, то получится 28 формул; они записаны в таблице на форзаце II.

Обратите внимание, что в одной формуле приведения присутствуют либо *одинаковые* тригонометрические выражения, либо *сходные по звучанию выражения*: синус и косинус, тангенс и котангенс.

Чтобы использовать формулы приведения, не заучивая их, полезно знать два *мнемонических правила*[1] (в дальнейшем будем называть их ***правилами формул приведения***).

1) ***Правило знака:*** *в правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при условии, что угол* α *принадлежит* I *четверти.*

2) ***Правило названий:*** *когда в левой части формулы угол равен* $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ *или* $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, *то синус меняется на косинус, тангенс — на котангенс и наоборот, когда угол равен* $\pi\pm\alpha$ *или* $2\pi-\alpha$, *то название выражения сохраняется.*

Например, записывая формулу приведения для выражения $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$, получим:

1) знак в правой части формулы — «минус», так как угол в левой части $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ принадлежит IV четверти, а в этой четверти значения синуса отрицательны;

2) название меняется на «косинус», так как угол в левой части формулы $\frac{3\pi}{2}+\alpha$.

Итак, имеем

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha.$$

Пример 2. Доказать тождество

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos^2(\pi+\alpha)\right)}{\sin(2\pi-\alpha)}=\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right).$$

[1] Правила, облегчающие запоминание, называются *мнемоническими*. Мнемозина — богиня памяти в греческой мифологии.

Доказательство. Пусть A — левая часть равенства; преобразуем ее, применяя соответствующие формулы приведения:

$$A=\frac{\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Поскольку обе части равенства тождественно равны одному и тому же выражению, то данное в условии равенство является тождеством. ☒

Пример 3. Найти значение выражения A, если

$$A=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Решение. Пусть $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)=\alpha$, тогда $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Значит,

$$A=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Ответ: $A=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

В XIII в. Насиреддин Туси — ученый-энциклопедист из Иранского города Туси (территория нынешнего Азербайджана) создал обсерваторию. В связи с астрономическими исследованиями впервые рассмотрел тригонометрию как особый раздел математики. В работах Туси встречаются и алгебраические соотношения между тригонометрическими выражениями.

1. **С помощью каких формул вычисление значений $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$ от произвольного угла t можно заменить вычислением $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi$ и $\operatorname{ctg}\varphi$, где $0<\varphi<2\pi$?**
2. **Запишите формулы приведения для синуса (косинуса, тангенса, котангенса) углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi-\alpha$.**
3. **Сформулируйте мнемонические правила для формул приведения.**

Адукацыйны партал www.adu.by

Упражнения

Укажите верное равенство (2.119—2.121).

2.119°. 1) $\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha$; 2) $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$;
3) $\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$; 4) $\sin(270°-\alpha)=-\cos\alpha$.

2.120°. 1) $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$;
3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$; 4) $\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha$.

2.121°. 1) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$.

2.122°. Выразите через тригонометрические выражения с переменной α:

1) $\operatorname{ctg}(270°+\alpha)$; 2) $\operatorname{tg}(270°-\alpha)$;
3) $\sin(3\pi+\alpha)$; 4) $\cos(3\pi-\alpha)$;
5) $\sin\left(\alpha-\frac{7\pi}{2}\right)$; 6) $\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)$;
7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$; 8) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)$;
9) $\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)$.

Найдите значение выражения (2.123—2.126).

2.123°. 1) $\sin 330°$; 2) $\cos 120°$; 3) $\operatorname{tg}135°$;
4) $\operatorname{ctg}225°$; 5) $\sin(-510°)$; 6) $\cos(-570°)$;
7) $\operatorname{tg}(-480°)$; 8) $\operatorname{ctg}(-585°)$; 9) $\sin 3915°$;
10) $\cos 4110°$; 11) $\operatorname{tg}3570°$; 12) $\operatorname{ctg}4560°$.

2.124°. 1) $\sin\frac{2\pi}{3}$; 2) $\cos\frac{5\pi}{6}$; 3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$;
4) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$; 5) $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;
7) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; 9) $\sin\frac{21\pi}{4}$;
10) $\cos\frac{23\pi}{6}$; 11) $\operatorname{tg}\frac{8\pi}{3}$; 12) $\operatorname{ctg}\frac{29\pi}{3}$.

2.125. 1) $6\sin\frac{5\pi}{6}+2\cos\frac{5\pi}{3}$; 2) $3\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$;

3) $3\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+2\cos\frac{14\pi}{3}$;

4) $2\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)-4\sin\frac{19\pi}{3}$;

5) $\sin\left(-\frac{15\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{16\pi}{3}\right)$;

6) $\sin\left(-\frac{23\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{21\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$.

2.126. 1) $\operatorname{tg}930°-\sin(-1110°)+\cos(-1470°)$;
2) $\sin(-1125°)+\cos(-945°)+\operatorname{tg}1755°$;
3) $\sin^2 930°-\cos^2(-675°)+\operatorname{tg}^2 855°$;
4) $\cos^2(-690°)+\sin^2(-900°)+\operatorname{ctg}^2 495°$.

2.127°. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)}$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(3\pi-\alpha)+\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)\sin(3\pi+\alpha)$;

4) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)-\sin(\alpha-5\pi)\cos\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$;

5) $\left(\sin(\alpha+2\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(\alpha-2\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

6) $\left(\cos(\alpha-4\pi)-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2-\left(\sin(\alpha+6\pi)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$.

Докажите тождество (2.128—2.129).

2.128. 1) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos^2(-\alpha)=-1$;

2) $\cos(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin^2(-\alpha)=1$;

3) $\dfrac{\sin(\alpha-\pi)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)}=\operatorname{tg}^2\alpha$;

4) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}=-\operatorname{ctg}\alpha$.

Адукацыйны партал www.adu.by

2.129. 1) $\dfrac{2-2\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

2) $\dfrac{2\cos^2(\pi-\alpha)-2}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$;

3) $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)-\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

4) $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)-\cos^2(2\pi+\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

2.130*. Найдите значение выражения:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;

3) $\cos\left(\pi+\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$; 4) $\sin\left(\pi-\arcsin\frac{3}{7}\right)$;

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\operatorname{arcctg}8\right)$; 6) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg}(-6)\right)$.

2.11. Формулы сложения

Теорема 1. Имеют место тождества:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (2)$$

Доказательство тождества (1).

Отметим на единичной окружности точки A_α, A_β, $A_{\alpha-\beta}$, A_0 (рис. 95). Их координаты: $A_\alpha(\cos\alpha;\ \sin\alpha)$, $A_\beta(\cos\beta;\ \sin\beta)$, $A_{\alpha-\beta}(\cos(\alpha-\beta);\ \sin(\alpha-\beta))$, $A_0(1;\ 0)$. Повернем каждый из лучей OA_0 и $OA_{\alpha-\beta}$ на угол β. Тогда луч OA_0 совместится с лучом OA_β, а луч $OA_{\alpha-\beta}$ совместится с лучом OA_α. При этом точка A_0 совместится с точкой A_β, а точка $A_{\alpha-\beta}$ совместится с точкой A_α.

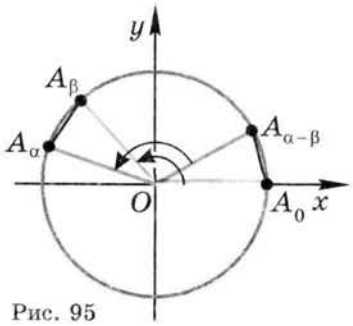


Рис. 95

Значит, отрезки $A_0A_{\alpha-\beta}$ и $A_\beta A_\alpha$ равны: $A_0A_{\alpha-\beta}=A_\beta A_\alpha$.

Применяя формулу $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ для расстояния между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$, получаем:

$$A_0A_{\alpha-\beta}^2=(x_{\alpha-\beta}-x_0)^2+(y_{\alpha-\beta}-y_0)^2=$$
$$=(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\sin(\alpha-\beta)-0)^2=$$
$$=\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta)=2-2\cos(\alpha-\beta);$$

$$A_\beta A_\alpha^2=(x_\alpha-x_\beta)^2+(y_\alpha-y_\beta)^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=$$
$$=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=$$
$$=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).$$

Отсюда получаем

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \ \boxtimes$$

Эта формула читается так: *косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов плюс произведение синусов этих углов.*

Доказательство тождества (2). Подставляя в формулу (1) вместо угла β угол $-\beta$, получаем

$$\cos(\alpha-(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta).$$

Применив формулы $\cos(-\beta)=\cos\beta$, $\sin(-\beta)=-\sin\beta$, получим

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \ \boxtimes$$

Эта формула читается так: *косинус суммы двух углов равен произведению косинусов этих углов минус произведение синусов этих углов.*

Используя формулы (1) и (2), можно доказать известные нам формулы приведения $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ для произвольного угла (напомним, что в п. 2.1 эти формулы были обоснованы лишь для острого угла α, а их справедливость для любого угла в п. 2.10 принята без доказательства):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=0\cdot\cos\alpha+1\cdot\sin\alpha=\sin\alpha.$$

Адукацыйны партал www.adu.by

Значит, для любого угла α имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha. \qquad (3)$$

Заменяя в формуле (3) угол α на $\frac{\pi}{2}-\alpha$, получаем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Значит, для любого угла α имеем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha. \qquad (4)$$

Теорема 2. Имеют место тождества:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \qquad (5)$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \qquad (6)$$

Доказательство тождества (5).

$$\sin(\alpha-\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha-\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=$$

$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \ \boxtimes$$

Формула (5) читается так: *синус разности двух углов равен произведению синуса первого угла и косинуса второго угла минус произведение косинуса первого угла и синуса второго угла.*

Формулу (6) легко получить, заменив в формуле (5) угол β на $-\beta$ (выполните необходимые выкладки самостоятельно).

Поскольку разность $\alpha-\beta$ можно рассматривать и как сумму $\alpha+(-\beta)$, то тождества (1), (2), (5), (6) называют еще ***формулами*** или ***теоремами сложения для синуса и косинуса.***

Докажем теоремы сложения и для тангенса.

Напомним, что все тригонометрические выражения рассматриваются только в своей области определения, а тождество всегда доказывается для тех значений переменных, при которых имеют смысл обе его части.

Теорема 3. Имеют место тождества:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (8)$$

Доказательство тождества (7). Преобразуем левую часть равенства (7):

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=$$

↓ по формулам (2) и (4) получим ↓

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}=$$

↓ разделив числитель и знаменатель дроби на произведение $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, получим ↓

$$=\frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \ \boxtimes$$

Доказательство тождества (8) аналогичное (проведите его самостоятельно).

Пример 1. Вычислить $\sin17^\circ\cos13^\circ+\cos17^\circ\sin13^\circ$.

Решение.

$$\sin17^\circ\cos13^\circ+\cos17^\circ\sin13^\circ=\sin(17^\circ+13^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2. Доказать, что $\cos75^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Доказательство.

$$\cos75^\circ=\cos(45^\circ+30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}. \ \boxtimes$$

Пример 3*. Найти значение выражения A, если:

а) $A=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}7)$;

б) $A=\cos\left(\arccos(-0{,}8)-\operatorname{arctg}\left(-2\sqrt{2}\right)\right)$.

Адукацыйны партал www.adu.by

Решение. а) Пусть $\operatorname{arctg} 3 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 7 = \beta$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\operatorname{tg}\beta = 7$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$A = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{3+7}{1-3\cdot 7} = \frac{10}{-20} = -\frac{1}{2}.$$

б) Пусть $\arccos(-0{,}8) = \alpha$, $\operatorname{arctg}\left(-2\sqrt{2}\right) = \beta$, тогда $\cos\alpha = -0{,}8$, $\operatorname{tg}\beta = -2\sqrt{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$. Значит,

$$A = \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta =$$

$$= \cos\alpha\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}} + \sqrt{1-\cos^2\alpha}\ \operatorname{tg}\beta\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}} =$$

$$= -0{,}8\cdot\sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{0{,}36}\left(-2\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{-4}{15} + \frac{-2\sqrt{2}}{5} = -\frac{2}{15}\left(2+3\sqrt{2}\right).$$

Ответ: а) $A = -\frac{1}{2}$; б) $A = -\frac{2}{15}\left(2+3\sqrt{2}\right)$.

1. Сформулируйте и докажите теоремы сложения для синуса (косинуса).
2. Сформулируйте и докажите теоремы сложения для тангенса (котангенса).
3. При каких значениях α и β имеют смысл обе части:
   а) равенства (7);
   б) равенства (8)?

Упражнения

Преобразуйте выражение с помощью формул сложения **(2.131—2.132)**.

2.131°. 1) $\sin(60^\circ+\alpha)$; 2) $\sin(30^\circ-\alpha)$;
3) $\cos(\alpha-45^\circ)$; 4) $\cos(60^\circ+\alpha)$;
5) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$; 6) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$;
7) $\operatorname{ctg}(60^\circ-\alpha)$; 8) $\operatorname{ctg}(30^\circ+\alpha)$;
9) $\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; 10) $\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

2.132°. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; 2) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;
3) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

Адукацыйны партал www.adu.by

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 6) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$;
7) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; 8) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2.133. Найдите значение выражения:
а) $\sin(\alpha+\beta)$; б) $\sin(\alpha-\beta)$;
в) $\cos(\alpha-\beta)$; г) $\cos(\alpha+\beta)$,
если известно, что:
1) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\sin\beta = \frac{11}{61}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$;
2) $\cos\alpha = \frac{20}{29}$, $\cos\beta = -\frac{8}{17}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

2.134. Найдите значение выражения:
а) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; б) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$;
в) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$; г) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$,
если известно, что:
1) $\operatorname{tg}\alpha = 1\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{4}$;
2) $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\sin\beta = \frac{7}{25}$ и $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

2.135. Найдите значение выражения:
а) $\cos(\alpha+\beta)$; б) $\cos(\alpha-\beta)$,
если известно, что:
1) $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{1}{2}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;
2) $\sin\alpha = \sin\beta = -\frac{1}{2}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Упростите выражение **(2.136—2.137)**.

2.136. 1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$; 2) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\sin\alpha}$;

5) $\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\sin^2\alpha$;

6) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)+\sin^2\alpha$.

2.137. 1) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta}$;

2) $\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}$;

3) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$;

4) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\sin(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}$;

5) $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$;

6) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$.

2.138°. Найдите значения выражений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\alpha=105°$; 2) $\alpha=75°$; 3) $\alpha=-15°$;

4) $\alpha=\frac{\pi}{12}$; 5) $\alpha=\frac{11\pi}{12}$; 6) $\alpha=-\frac{7\pi}{12}$.

Упростите выражение (2.139—2.141).

2.139. 1) $\sin69°\cos39°-\cos69°\sin39°$;

2) $\cos47°\cos17°+\sin47°\sin17°$;

3) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$;

5) $\frac{\operatorname{tg}16°+\operatorname{tg}44°}{1-\operatorname{tg}16°\operatorname{tg}44°}$; 6) $\frac{\operatorname{tg}71°-\operatorname{tg}26°}{1+\operatorname{tg}71°\operatorname{tg}26°}$;

7) $\frac{\operatorname{tg}\frac{9\pi}{28}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{14}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{14}\operatorname{tg}\frac{9\pi}{28}}$; 8) $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}}$.

2.140. 1) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{7\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

2.141. 1) $\sin18°\cos12°+\cos18°\sin12°+\sin34°\cos4°-$
$-\cos34°\sin4°$;

2) $\sin39°\cos21°+\cos39°\sin21°+\sin78°\cos18°-$
$-\cos78°\sin18°$;

3) $\cos70°\cos25°+\sin70°\sin25°+\cos12°\cos33°-$
$-\sin33°\sin12°$;

4) $\cos26°\cos34°-\sin26°\sin34°+\cos83°\cos23°+$
$+\sin83°\sin23°$.

2.142. Докажите тождество:

1) $\cos\alpha\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)=\sin(\alpha-\beta)$;

2) $\sin\alpha\sin\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)=\sin(\alpha+\beta)$;

3) $\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha-\cos^2 2\alpha\sin^2\alpha=\sin3\alpha\sin\alpha$;

4) $\cos^2 3\alpha\cos^2 2\alpha-\sin^2 3\alpha\sin^2 2\alpha=\cos5\alpha\cos\alpha$;

5) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$; 6) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

2.143*. Найдите значение выражения:

1) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{4}+\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

2) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{5}{13}\right)$;

3) $\sin\left(\arccos\frac{5}{\sqrt{26}}-\arcsin\frac{12}{13}\right)$;

4) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$;

5) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{12}{5}\right)\right)$;

6) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)+\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

2.144*. Решите уравнение:

1) $\sin x\cos2x+\cos x\sin2x=0$;

2) $\cos8x\cos3x+\sin8x\sin3x=0$.

2.145*. Докажите, что:

1) $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

2) $\cos(\alpha-\beta)<\cos\alpha+\sin\beta$, если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

дукацыйны партал www.adu.by

2.12. Формулы двойного и половинного углов

Теорема. Имеют место тождества:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad (1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \quad (3)$$

Доказательство тождества (1).

Из тождества $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ при $\beta = \alpha$ получим

$$\sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha$$

и после приведения подобных слагаемых имеем

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha. \ \boxtimes$$

Тождество (2) доказывается аналогично. (Проведите доказательство самостоятельно.)

Тождество (3) получается из формулы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

при $\beta = \alpha$.

Пример 1. Найти значение выражения $\operatorname{tg} 2p$, если $\operatorname{tg} p = 0{,}7$.

Решение. $\operatorname{tg} 2p = \frac{2\operatorname{tg} p}{1-\operatorname{tg}^2 p} = \frac{2\cdot 0{,}7}{1-0{,}49} = \frac{1{,}4}{0{,}51} = \frac{140}{51} = 2\frac{38}{51}$.

Ответ: $\operatorname{tg} 2p = 2\frac{38}{51}$.

Пример 2. Доказать тождество:

а) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; (4)

б) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$. (5)

Доказательство. а) Рассмотрим два тождества:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad (6)$$

и

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}. \quad (7)$$

Сложив левые части равенств (6) и (7) и сложив их правые части, получим тождество

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

(Из этой формулы следует: $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$, что дает еще один способ вычисления косинуса двойного угла.) $\boxtimes$

б) Если из левой части тождества (6) вычесть левую часть тождества (7) и из правой части тождества (6) вычесть правую часть тождества (7), то получим тождество (5):

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

(Из этой формулы следует: $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, что дает еще один способ вычисления косинуса двойного угла.)

Часто пользуются следующими двумя тождествами, полученными из тождеств (4) и (5):

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}, \quad (8)$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}. \quad (9)$$

Тождества (8) и (9) называют ***формулами половинного угла***. Соответственно для тангенса и котангенса получим:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}, \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}. \quad (11)$$

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения выражения A, если:

а) $A = 16\cos^4 3\alpha + 16\sin^4 3\alpha$;

б)* $A = 16\cos^6 3\alpha - 16\sin^6 3\alpha$.

Решение.

а) $A = 16(\cos^2 3\alpha + \sin^2 3\alpha)^2 - 16\cdot 2\cos^2 3\alpha\sin^2 3\alpha =$

↓ применив основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного угла, получим ↓

$= 16 - 8\sin^2 6\alpha.$

Адукацыйны партал www.adu.by

Поскольку 0 является наименьшим значением выражения $\sin^2 6\alpha$, а 1 — наибольшим, то при $\sin^2 6\alpha = 0$ имеем $A = 16$, а при $\sin^2 6\alpha = 1$ имеем $A = 8$.

б) $A = 16(\cos^2 3\alpha)^3 - 16(\sin^2 3\alpha)^3 =$

↓ применив формулы (8) и (9), получим ↓

$$= 16\left(\frac{1+\cos 6\alpha}{2}\right)^3 - 16\left(\frac{1-\cos 6\alpha}{2}\right)^3 =$$

$$= 2(1 + 3\cos 6\alpha + 3\cos^2 6\alpha + \cos^3 6\alpha) - 2(1 - 3\cos 6\alpha + 3\cos^2 6\alpha - \cos^3 6\alpha) = 2(6\cos 6\alpha + 2\cos^3 6\alpha) = 12\cos 6\alpha + 4\cos^3 6\alpha.$$

Положим $\cos 6\alpha = t$, тогда $t \in [-1; 1]$. Рассмотрим функцию $f(t) = 12t + 4t^3$, где $t \in [-1; 1]$.

Найдем наименьшее и наибольшее значения этой функции на отрезке $[-1; 1]$:

$$f'(t) = 12 + 12t^2;$$

$f'(t) > 0$ при всех $t \in [-1; 1]$, значит, функция $f(t)$ возрастает на этом промежутке. Таким образом,

$f(-1) = -12 + 4(-1) = -16$ — наименьшее значение функции,

$f(1) = 12 + 4 = 16$ — наибольшее значение функции.

Ответ: а) 8 и 16; б) −16 и 16.

Пример 4*. Найти значение выражения A, если

$$A = \sin^2\left(\frac{1}{2}\arccos(-0{,}2)\right).$$

Решение. Пусть $\arccos(-0{,}2) = \alpha$, тогда $\cos\alpha = -0{,}2$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Значит,

$$A = \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2} = \frac{1+0{,}2}{2} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $A = \frac{3}{5}$.

Арабский астроном и математик из Хорасана Абу-ль-Вефа (940—998) составил таблицы синусов, вычисленных через каждые 10′ с точностью до $\frac{1}{60^4}$, а также таблицы тангенсов. Ученый сформулировал теоремы, соответствующие формулам

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

1. Запишите и докажите формулу синуса (косинуса, тангенса, котангенса) двойного угла.
2. Запишите и докажите формулу синуса (косинуса, тангенса, котангенса) половинного угла.
3. При каких значениях α имеют смысл обе части:
   а) равенства (3);
   б) равенства (10);
   в) равенства (11)?

Упражнения

Преобразуйте каждое из выражений с помощью формул двойного угла (2.146—2.147).

2.146°. 1) $\sin 3\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg} 5\alpha$; 2) $\sin\alpha$, $\cos 5\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$;
3) $\sin 6\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\operatorname{tg} 8\alpha$; 4) $\sin 4\alpha$, $\cos 8\alpha$, $\operatorname{ctg} 6\alpha$;
5) $\sin\frac{\alpha}{3}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\alpha}{4}$; 6) $\sin\frac{3\alpha}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2.147°. 1) $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$;
3) $\cos\left(4\alpha - \frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{5\pi}{8}\right)$.

2.148°. Преобразуйте выражение с помощью формул половинного угла:
1) $\sin^2 4\alpha$; 2) $\cos^2 6\alpha$;
3) $\operatorname{tg}^2 5\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2 8\alpha$;
5) $\sin^2\left(5\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$; 6) $\cos^2\left(7\alpha + \frac{3\pi}{4}\right)$;
7) $\operatorname{tg}^2\left(6\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$; 8) $\operatorname{ctg}^2\left(5\alpha + \frac{7\pi}{4}\right)$.

2.149°. Найдите значение выражения:
1) $1 - 2\sin^2 15°$; 2) $2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$;
3) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$; 4) $\sin^2\frac{\pi}{8} - \cos^2\frac{\pi}{8}$;
5) $6\sin 75°\cos 75°$; 6) $4\sin^2 75°$;
7) $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$; 8) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

Упростите выражение (2.150—2.153).

2.150°. 1) $\cos^4 20° - \sin^4 20°$; 2) $\cos^4 10° - \sin^4 10°$;

3) $2\sin 50° \sin 40°$; 4) $\cos^2 50° - \cos^2 40°$;

5) $\frac{6\operatorname{tg} 40°}{1 - \operatorname{ctg}^2 50°}$; 6) $\frac{10\operatorname{tg} 65°}{1 - \operatorname{tg}^2 115°}$.

2.151. 1) $\cos 4\alpha + \sin^2 2\alpha$; 2) $\cos 4\alpha - \cos^2 2\alpha$;

3) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$; 4) $\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$;

5) $8\cos 4\alpha \cos 2\alpha \cos\alpha \sin\alpha$;

6) $16\cos 8\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha \sin 2\alpha$;

7) $(\cos^3\alpha + \sin^3\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$;

8) $(\cos^3\alpha - \sin^3\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)$;

9) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \frac{1}{4}\cos 4\alpha$;

10) $\sin^4 2\alpha + \cos^4 2\alpha - 0{,}25\cos 8\alpha$.

2.152*. 1) $1 - 8\sin^2\frac{17\pi}{16}\cos^2\frac{15\pi}{16}$; 2) $8\sin^2\frac{23\pi}{24}\cos^2\frac{25\pi}{24} - 1$;

3) $\sin^4\frac{23\pi}{24} + \cos^4\frac{25\pi}{24}$; 4) $\sin^4\frac{17\pi}{16} + \cos^4\frac{15\pi}{16}$;

5) $\sin^6\frac{13\pi}{12} + \cos^6\frac{23\pi}{12}$; 6) $\cos^6\frac{17\pi}{8} - \sin^6\frac{31\pi}{8}$.

2.153. 1) $\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\alpha}{2}}{2}}$; 2) $\sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\alpha}{4}}{2}}$;

3) $\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}}$; 4) $\sqrt{\frac{1 + \cos 6\alpha}{1 - \cos 6\alpha}}$.

2.154°. Найдите значение выражения:

а) $\sin 2\alpha$; б) $\cos 2\alpha$; в) $\operatorname{tg} 2\alpha$; г) $\operatorname{ctg} 2\alpha$,

если известно, что:

1) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 2) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

3) $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

2.155. Найдите значение выражения:

а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$; г) $\operatorname{ctg}\alpha$,

если известно, что:

1) $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$ и $3\pi < \alpha < 4\pi$.

2.156. Найдите значение выражения:

а) $\sin 4\alpha$; б) $\cos 4\alpha$; в) $\operatorname{tg} 4\alpha$; г) $\operatorname{ctg} 4\alpha$,

если известно, что:

1) $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ и $-\frac{\pi}{4} < \alpha < -\frac{\pi}{8}$;

2) $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{8}$.

2.157. Найдите значение выражения:

а) $\operatorname{tg}(2\alpha + \beta)$; б) $\operatorname{tg}(2\alpha - \beta)$,

если известно, что $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$.

2.158. Найдите значение выражения:

а) $\sin\frac{\alpha}{2}$; б) $\cos\frac{\alpha}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$,

если известно, что:

1) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{7}{24}$ и $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$;

2) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{3}$ и $\pi < 2\alpha < \frac{3\pi}{2}$.

2.159. Найдите значение выражения:

а) $\sin^2 4\alpha$; б) $\cos^2 4\alpha$;

в) $\operatorname{tg}^2 4\alpha$; г) $\operatorname{ctg}^2 4\alpha$,

если известно, что:

1) $\cos 2\alpha = \frac{1}{5}$; 2) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$.

2.160. Докажите тождество:

1) $4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha = \cos^2 2\alpha - 1$;

2) $8\cos^4\alpha = 3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha$;

дукацыйны партал www.adu.by

3) $\dfrac{1+\sin 2\alpha+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\sin 2\alpha-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}=\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}{1+\cos 2\alpha-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}=\operatorname{tg}\alpha$.

2.161. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+\sin 2\alpha$; 2) $\sin 2\alpha-(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$;

3) $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 4) $4\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1$;

5) $1-2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)$; 6) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5\alpha}{2}\right)-1$.

Найдите значение выражения (2.162—2.163).

2.162*. 1) $\sin\left(2\arcsin\frac{1}{5}\right)$; 2) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$;

5) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$; 6) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{5}{4}\right)$.

2.163*. 1) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-2\arcsin\frac{1}{4}\right)$;

2) $\cos\left(2\arcsin\frac{2}{3}+\arccos\frac{3}{4}\right)$.

2.13. Преобразование произведения в сумму (разность). Преобразование суммы (разности) в произведение

Теорема 1. Имеют место тождества:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)), \quad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)), \quad (2)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)). \quad (3)$$

Доказательство. Рассмотрим формулы сложения для синуса:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \quad (4)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \quad (5)$$

Сложив левые части тождеств (4) и (5) и сложив их правые части, получим тождество $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$, откуда и следует тождество (1).

Аналогично из формул сложения для косинуса

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \quad (6)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad (7)$$

получим:

$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta,$$

откуда и следуют тождества (3) и (2). ⊠

Теорема 2. Имеют место тождества:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}, \quad (8)$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \quad (9)$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}, \quad (10)$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}. \quad (11)$$

Доказательство. Из формул сложения для синуса и косинуса (4), (5), (6) и (7), складывая или вычитая соответственно их части, получаем тождества:

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta, \quad (12)$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta, \quad (13)$$

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta, \quad (14)$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta. \quad (15)$$

Обозначим теперь $\alpha+\beta=x$, $\alpha-\beta=y$. Решая систему уравнений относительно α и β, получаем:

Адукацыйны партал www.adu.by

$$\begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ \alpha-\beta=y;\end{cases}\quad\begin{cases}\alpha+\beta=x,\\ 2\alpha=x+y;\end{cases}\quad\begin{cases}\beta=x-\alpha,\\ \alpha=\frac{x+y}{2};\end{cases}\quad\begin{cases}\beta=\frac{x-y}{2},\\ \alpha=\frac{x+y}{2}.\end{cases}$$

Подставив эти значения в тождества (12), (13), (14) и (15), получим соответственно тождества (8), (9), (10) и (11) (убедитесь в этом). ☒

Теорема 3. Имеют место тождества:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\qquad(16)$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.\qquad(17)$$

Доказательство тождества (16):

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$ ☒

Тождество (17) доказывается аналогично.

Пример 1. Доказать тождество:

а) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Доказательство. а) Преобразуем левую часть равенства:

$$\sin x+\cos x=\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$$

↓ по формуле (8) получим ↓

$$=2\sin\frac{x+\frac{\pi}{2}+x}{2}\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}-x}{2}=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$ ☒

б) Докажите самостоятельно.

Пример 2. Преобразовать в произведение сумму $1+\sin x$.

Решение. *Способ 1.*

$$1+\sin x=\sin\frac{\pi}{2}+\sin x=$$

↓ по формуле (8) получим ↓

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right).$$

Адукацыйны партал

Способы 2 и 3. Покажите, используя другие формулы, что выражение $1+\sin x$ можно представить также в виде $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$ или в виде $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

Обратите внимание, что вид полученных выражений различен, но все они тождественно равны исходному выражению $1+\sin x$.

Пример 3. Доказать, что

$$\sin 20^\circ+\cos 50^\circ=\cos 10^\circ.$$

Доказательство. *Способ 1* (с применением формулы (8)).

$$\sin 20^\circ+\cos 50^\circ=\sin 20^\circ+\sin 40^\circ=$$
$$=2\sin 30^\circ\cos(-10^\circ)=\cos 10^\circ.$$ ☒

Способ 2. Доказательство с использованием формулы (10) проведите самостоятельно.

▲**Пример 4.** Решить уравнение

$$2\sin 7x\cos 3x-\sin 10x=0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$2\sin 7x\cos 3x-\sin 10x=2\cdot\frac{1}{2}(\sin 10x+\sin 4x)-\sin 10x=$$
$$=\sin 10x+\sin 4x-\sin 10x=\sin 4x.$$

Следовательно,

$$\sin 4x=0.$$

Таким образом, $4x=\pi k$, $k\in Z$, откуда $x=\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$.

Ответ: $\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$.▲

1. Запишите формулы сложения синусов и косинусов.
2. Запишите формулы преобразования произведений $\sin\alpha\cos\beta$, $\cos\alpha\cos\beta$, $\sin\alpha\sin\beta$ в сумму (разность).
3. Запишите формулы преобразования сумм (разностей) $\sin x\pm\sin y$, $\cos x\pm\cos y$ в произведение.
4. Докажите тождества (1), (2), (3).
5. Докажите тождества (8), (9), (10), (11).
6. Докажите тождества (16), (17).

Упражнения

Представьте в виде суммы выражение **(2.164—2.166)**.

2.164°. 1) $\sin 5^\circ \cos 85^\circ$; 2) $\sin 50^\circ \cos 20^\circ$;
3) $\sin 35^\circ \sin(-25^\circ)$; 4) $\sin(-35^\circ)\sin 65^\circ$;
5) $2\cos(-10^\circ)\cos 80^\circ$; 6) $2\cos 22^\circ \cos(-23^\circ)$.

2.165°. 1) $\sin(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$;
2) $\cos(\alpha+3\beta)\sin(\alpha-3\beta)$;
3) $\cos(\alpha-2\beta)\cos(\alpha+2\beta)$;
4) $2\sin(2\alpha-3\beta)\sin(2\alpha+3\beta)$.

2.166°. 1) $\cos\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)$;
3) $\sin\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{12}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}+\alpha\right)$;
5) $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; 6) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

2.167. Докажите тождество:
1) $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$;
2) $4\cos\alpha\cos(60^\circ-\alpha)\cos(60^\circ+\alpha)=\cos 3\alpha$;
3) $\sin^2\alpha+\cos(60^\circ+\alpha)\cos(60^\circ-\alpha)=\frac{1}{4}$;
4) $\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)+\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$.

Представьте в виде произведения выражение **(2.168—2.171)**.

2.168°. 1) $\cos(-9^\circ)-\cos 51^\circ$; 2) $\cos 9^\circ+\cos(-51^\circ)$;
3) $\sin 55^\circ+\sin(-65^\circ)$; 4) $\sin(-55^\circ)-\sin 65^\circ$;
5) $\cos 315^\circ+\cos 225^\circ$; 6) $\cos 348^\circ-\cos 288^\circ$;
7) $\sin 275^\circ-\sin 185^\circ$; 8) $\sin 395^\circ+\sin 455^\circ$.

2.169°. 1) $\sin\frac{7\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}$; 2) $\sin\frac{7\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{9}$;
3) $\cos\frac{7\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{9}$; 4) $\cos\frac{7\pi}{18}-\cos\frac{\pi}{9}$;
5) $\sin 2\alpha+\sin 8\alpha$; 6) $\sin 5\alpha-\sin 3\alpha$;
7) $\cos\alpha-\cos 5\alpha$; 8) $\cos\alpha+\cos 3\alpha$.

2.170. 1) $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$;
2) $\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{16}\right)-\cos\left(\frac{9\pi}{16}-3\alpha\right)$;
3) $\sin\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)$;
4) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$;
5) $\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{9}\right)-\cos\left(\frac{11\pi}{18}-4\alpha\right)$;
6) $\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{10}\right)-\sin\left(2\alpha+\frac{3\pi}{5}\right)$.

2.171. 1) $\operatorname{tg}7\alpha+\operatorname{tg}9\alpha$; 2) $\operatorname{tg}13\alpha-\operatorname{tg}9\alpha$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right)$.

2.172. Найдите значение выражения:
1) $\frac{\sin 35^\circ+\sin 85^\circ}{\cos 25^\circ}$; 2) $\frac{\cos 24^\circ-\cos 84^\circ}{\sin 54^\circ}$;
3) $\frac{\cos 89^\circ+\cos 1^\circ}{\sin 89^\circ+\sin 1^\circ}$; 4) $\frac{\sin 15^\circ-\sin 75^\circ}{\cos 15^\circ+\cos 75^\circ}$;
5) $\frac{\sin 37^\circ-\sin 53^\circ}{1-2\cos^2 41^\circ}$; 6) $\frac{\cos 50^\circ-\cos 70^\circ}{1-2\sin^2 40^\circ}$.

Представьте в виде произведения или частного выражение **(2.173—2.179)**.

2.173. 1) $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha$;
2) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$;
3) $\sin 4\alpha+\sin 10\alpha+\sin 22\alpha+\sin 16\alpha$;
4) $\cos 2\alpha+\cos 14\alpha+\cos 6\alpha+\cos 10\alpha$.

2.174. 1) $\sin 4\alpha-1$; 2) $1+\sin 4\alpha$; 3) $\sin 6\alpha+\frac{1}{2}$;
4) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 2\alpha$; 5) $\cos\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos\alpha+\frac{1}{2}$;
7) $\operatorname{tg}3\alpha+1$; 8) $1-\operatorname{tg}5\alpha$.

2.175. 1) $1+2\sin\alpha$; 2) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$; 3) $\sqrt{2}\cos\alpha-1$;
4) $2\cos\alpha-\sqrt{3}$; 5) $3\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\alpha$.

Дукацыйны партал www.adu.by

2.176. 1) $\frac{3}{4}-\sin^2\alpha$; 2) $0{,}75-\cos^2\alpha$;
3) $\sin^2\alpha-0{,}25$; 4) $\cos^2\alpha-0{,}25$;
5) $3-\operatorname{tg}^2\alpha$; 6) $\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{1}{3}$.

2.177. 1) $1-2\sin^2 22°$; 2) $1-2\cos^2 38°$;
3) $2\cos^2 18°-1$; 4) $2\sin^2 48°-1$;
5) $3\operatorname{tg}^2 12°-1$; 6) $\operatorname{tg}^2 14°-3$.

2.178. 1) $1-\cos\alpha+\sin\alpha$; 2) $1-\sin\alpha+\cos\alpha$;
3) $\cos\alpha+\sin\alpha-1$; 4) $1-\sin\alpha-\cos\alpha$;
5) $1+\cos\alpha+\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha$; 6) $1-\sin\alpha+\cos\alpha-\operatorname{tg}\alpha$.

2.179*. 1) $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}+\sqrt{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
2) $\sqrt{\operatorname{tg}2\alpha+\sin 2\alpha}-\sqrt{\operatorname{tg}2\alpha-\sin 2\alpha}$ при $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

2.180. Докажите тождество:

1) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45°+\alpha)$;
2) $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{tg}(45°-\alpha)$;
3) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$;
4) $\frac{\cos\alpha+\cos 5\alpha+\cos 9\alpha+\cos 13\alpha}{\sin\alpha+\sin 5\alpha+\sin 9\alpha+\sin 13\alpha}=\operatorname{ctg}7\alpha$.

2.181. Решите уравнение:

1) $2\sin 4x\sin 6x+\cos 10x=0$;
2) $2\sin 8x\sin 3x-\cos 5x=0$;
3) $2\cos 4x\cos 6x-\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=0$;
4) $2\sin 5x\cos 7x+\sin(\pi-2x)=0$;
5) $\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}4x=0$;
6) $\operatorname{tg}3x+\operatorname{tg}4x=0$.

▲2.14. Выражение синуса, косинуса и тангенса угла через тангенс половинного угла

В этом пункте, используя формулы двойного угла и основное тригонометрическое тождество, мы получим ряд формул, которые позволяют $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ выражать через тангенс половинного угла, т. е. через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Теорема. Имеют место тождества:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{1}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{3}$$

Эти формулы принято называть ***универсальными подстановками.*** Докажем их.

Доказательство равенства (1). Преобразовав левую часть равенства (1), получим

$$\sin\alpha=\frac{\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{1}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$

↓ разделив числитель и знаменатель дроби на $\cos^2\frac{\alpha}{2}\neq 0$, получим ↓

$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \boxtimes$$

Равенство (2) доказывается аналогично (проведите доказательство самостоятельно).

Формула (3) — это уже известная нам формула тангенса двойного угла (см. п. 2.12).

Напомним, что каждая из формул (1), (2), (3) доказывается для тех значений α, при которых имеют смысл обе ее части. Например, для формулы (3) это $\alpha\neq\frac{\pi}{2}n$ $(n\in Z)$. $\boxtimes$

дукацыйны партал www.adu.by

Пример. Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$, найти значение выражения

$$A=25\sin 2\alpha-\cos 2\alpha.$$

Решение. Используя формулы (1) и (2), преобразуем выражение A:

$$A=25\cdot\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{50\operatorname{tg}\alpha-1+\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Выразим $\operatorname{tg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ по формуле (3) и найдем его значение:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4}{1-4}=-\frac{4}{3}.$$

Подставив $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$ в выражение A, получим:

$$A=\frac{50\frac{-4}{3}-1+\frac{16}{9}}{1+\frac{16}{9}}=-23\frac{18}{25}.$$

Ответ: $A=-23\frac{18}{25}$.

1. Какие формулы принято называть универсальными подстановками?
2. Докажите тождества (1), (2) и (3).
3. Докажите тождество (2) двумя способами.
4. При каких значениях x имеют смысл обе части:
   а) равенства (1);
   б) равенства (2);
   в) равенства (3)?
5. Как выразить $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$?

Упражнения

2.182. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если:

1) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$; 2) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-2$;

3) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=4$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=-5$.

2.183. Зная, что $\operatorname{ctg}\alpha=3$, найдите значение выражения:

1) $\frac{\cos 2\alpha+3}{2\sin 2\alpha-1}$; 2) $\frac{\sin 2\alpha-4}{3\cos 2\alpha+1}$.

2.184. Зная, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$, найдите значение выражения:

1) $\frac{5-4\cos\alpha}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}-2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$; 2) $\frac{5-2\sin\alpha}{\left(\sin\frac{\alpha}{2}+4\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2}$.

Преобразуйте выражение, используя универсальные подстановки **(2.185—2.186)**.

2.185. 1) $\sin\alpha-2\cos\alpha$; 2) $5\sin\alpha-\cos\alpha$;
3) $5\sin\alpha+12\cos\alpha$; 4) $3\sin\alpha+5\cos\alpha$.

2.186. 1) $\frac{3-4\sin\alpha}{5-8\cos\alpha}$; 2) $\frac{5-7\cos\alpha}{4-7\sin\alpha}$;
3) $\frac{1-4\sin^2\alpha}{1-4\cos^2\alpha}$; 4) $\frac{3-4\sin^2\alpha}{3-4\cos^2\alpha}$;
5) $\frac{4+3\operatorname{tg}\alpha}{5+3\operatorname{tg}\alpha}$; 6) $\frac{7-2\operatorname{ctg}\alpha}{8-5\operatorname{ctg}\alpha}$;
7) $\frac{5-2\operatorname{ctg}\alpha}{3-2\operatorname{tg}\alpha}$; 8) $\frac{3-4\operatorname{tg}\alpha}{5-8\operatorname{ctg}\alpha}$.

2.187. Выразите через $\operatorname{tg}2\alpha$ выражение A, если:

1) $A=\frac{\cos 4\alpha+\operatorname{ctg}4\alpha}{\operatorname{ctg}4\alpha}-1$; 2) $A=1-\frac{\sin 4\alpha+\operatorname{tg}4\alpha}{\operatorname{tg}4\alpha}$;

3) $A=\frac{1+\operatorname{tg}4\alpha}{1+\operatorname{ctg}4\alpha}$; 4) $A=\frac{\operatorname{ctg}4\alpha+1}{\operatorname{tg}4\alpha+1}$.

2.188. Докажите тождество:

1) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{tg}^2(-\alpha)-1}{2\operatorname{tg}(-\alpha)}$.

2.189. Найдите значение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если:

1) $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$; 2) $\sin\alpha-\cos\alpha=-1$.

2.190. Найдите значение выражения A, если:

1) $A=\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$;

2) $A=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$;

3) $A=a\sin 2\alpha+b\cos 2\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$;

4) $A=m\sin\alpha-n\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{m}{n}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

2.191*. Выразите через $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ при $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$ выражение:

1) $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$;
2) $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$;
3) $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$;
4) $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

▲ 2.15. Преобразования некоторых тригонометрических выражений

Рассмотрим на конкретных примерах еще несколько дополнительных приемов преобразований тригонометрических выражений.

1. Преобразование выражения $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ с использованием вспомогательного угла

Пусть $a^2+b^2\neq 0$. Тогда

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=$$

↓ вынесем за скобки множитель $\sqrt{a^2+b^2}$ ↓

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right)=$$

↓ заметим, что при любых значениях a и b верно равенство $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$; значит, существует такой угол φ, что $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (см. пример 5 п. 2.9) ↓

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\varphi\sin\alpha+\sin\varphi\cos\alpha)=$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi).$$

Таким образом, имеем тождество

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\varphi);$$

где угол φ определяется из равенств

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \text{т. е. } \operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}.$$

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

Решение.

$$\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)=$$

$$=2\left(\cos\frac{\pi}{6}\sin\alpha-\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right).$$

Поскольку наибольшим значением выражения $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$ является число 1, а наименьшим — число -1, то наибольшим и наименьшим значениями выражения $2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$, а значит, и заданного выражения, будут соответственно числа 2 и -2.

Ответ: 2; -2.

2. Преобразование выражения вида

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha\cos8\alpha\cdot\ldots\cdot\cos(2^n\alpha),$$

где $n\in N$

Пример 2. Найти значение выражения

$$A=\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Решение. Умножив выражение A на $2^3\sin\frac{\pi}{7}$ (показатель степени числа 2 равен 3 — числу множителей в выражении A, а значение синуса взято при самом малом угле — $\frac{\pi}{7}$), получим:

$$2^3\sin\frac{\pi}{7}\cdot A=2^3\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=$$

↓ используя несколько раз формулу синуса двойного угла, получаем ↓

$$=2^2\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\sin\frac{8\pi}{7}=$$

$$=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)=-\sin\frac{\pi}{7}.$$

Таким образом, $2^3\sin\frac{\pi}{7}\cdot A=-\sin\frac{\pi}{7}$, откуда находим $A=-\frac{1}{8}$.

Ответ: $A=-\frac{1}{8}$.

Заметим, что для преобразования произведения трех множителей пришлось трижды применить формулу синуса двой-

Адукацыйны партал www.adu.by

ного угла. Аналогичными рассуждениями можно в общем виде преобразовать произведение $n+1$ множителей:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cdot\ldots\cdot\cos(2^n\alpha)=$$

↓ умножив и разделив данное выражение на $2^{n+1}\sin\alpha$, получим ↓

$$=\frac{2^{n+1}\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cdot\ldots\cdot\cos(2^n\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}=$$

↓ применив $n+1$ раз формулу синуса двойного угла, получим ↓

$$=\frac{\sin(2^{n+1}\alpha)}{2^{n+1}\sin\alpha}.$$

Пример 3. Доказать, что верно равенство

$$\sin 18^\circ\sin 54^\circ=\frac{1}{4}.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть равенства:

$$\sin 18^\circ\sin 54^\circ=\sin 18^\circ\cos 36^\circ=$$

$$=\frac{2^2\cos 18^\circ\sin 18^\circ\cos 36^\circ}{2^2\cos 18^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{1}{4}.\ \boxtimes$$

3. Преобразование выражений с использованием формул половинного угла

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения

$$A=\sin^4 x+\cos^4 x.$$

Решение. *Способ 1.* $A=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=$

↓ применяя формулы половинного угла, получаем ↓

$$=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x)=$$

$$=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1+\cos^2 2x}{2}.$$

Так как наибольшим и наименьшим значениями выражения $\cos^2 2x$ являются числа 1 и 0, то соответственно наибольшим и наименьшим значениями выражения A являются числа $\frac{1+1}{2}=1$ и $\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$.

Ответ: 1; 0,5.

Способ 2. Покажем способ преобразования выражения A, основанный на использовании тождества $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$:

$$A=(\sin^2 x)^2+(\cos^2 x)^2=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Для этого выражения также легко найти наибольшее и наименьшее значения: $A=1$, если $\sin^2 2x=0$ и $A=0{,}5$, если $\sin^2 2x=1$.

Пример 5. Найти значение выражения A, если

$$A=\sin^6 x+\cos^6 x,$$

зная, что $\cos 4x=\frac{1}{3}$.

Решение. $A=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=$

↓ по формуле $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ получим ↓

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^3-3\sin^2 x\cos^2 x(\sin^2 x+\cos^2 x)=$$

$$=1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=$$

↓ поскольку $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$, то при $\cos 4x=\frac{1}{3}$ получим ↓

$$=1-\frac{3}{8}(1-\cos 4x)\Big|_{\cos 4x=\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $A=\frac{3}{4}$.

4. Преобразование тригонометрических сумм вида

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha \text{ и}$$

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha.$$

Дукацыйны партал www.adu.by

Пример 6. Преобразовать выражение

$$A=\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Решение. Умножив выражение A на $2\sin\frac{\pi}{14}$, получим:

$$2\sin\frac{\pi}{14}\cdot A=2\sin\frac{\pi}{14}\left(\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}\right)=$$

$$=2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{2\pi}{7}+2\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{7}=$$

применив формулу

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y)),$$

получим

$$=\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{3\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{14}-\cos\frac{5\pi}{14}+\cos\frac{5\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{7\pi}{14}=\cos\frac{\pi}{14}-\cos\frac{\pi}{2}=\cos\frac{\pi}{14}-0=\cos\frac{\pi}{14}.$$

Таким образом, $2\sin\frac{\pi}{14}\cdot A=\cos\frac{\pi}{14}$, откуда находим $A=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}$.

Ответ: $A=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{14}$.

1. Преобразуйте выражение вида $a\sin x+b\cos x$ с помощью введения вспомогательного угла.
2. Каким приемом можно преобразовать выражения вида $\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 8\alpha$?
3. Преобразуйте, используя формулы половинного угла, выражения вида $\sin^{2n}x$, $\cos^{2n}x$, $\operatorname{tg}^{2n}x$ при:
   а) $n=1$; б) $n=2$;
   в) $n=3$; г) $n=-2$.
4. Преобразуйте выражение
   $$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha,$$
   умножив и разделив его на $2\sin\frac{\alpha}{2}$.
5. Преобразуйте выражение
   $$\sin 3\alpha+\sin 6\alpha+\sin 9\alpha+\sin 12\alpha+\sin 15\alpha,$$
   умножив и разделив его на $2\sin\frac{3\alpha}{2}$.

Упражнения

2.192°. Преобразуйте выражение A, используя введение вспомогательного угла:

1) $A=\sqrt{3}\cos\alpha-\sin\alpha$;

2) $A=\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\alpha$;

3) $A=\sqrt{2}\cos 5\alpha+\sqrt{2}\sin 5\alpha$;

4) $A=2\cos 4\alpha-\sqrt{2}\sin 4\alpha$;

5) $A=3\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}+3\cos\frac{\alpha}{2}$;

6) $A=2{,}5\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{3}-2{,}5\cos\frac{\alpha}{3}$.

2.193. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения A из упражнения 2.192.

2.194. Упростите выражение A:

1) $A=\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{4\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{5}$;

2) $A=\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15}$;

3) $A=\cos 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$;

4) $A=8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$;

5) $A=8\sin 10^\circ\sin 30^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ$;

6) $A=8\sin 85^\circ\sin 80^\circ\sin 70^\circ\sin 30^\circ$;

7) $A=\sin^2 70^\circ\sin^2 50^\circ\sin^2 10^\circ$;

8) $A=\sin^2 18^\circ\sin^2 54^\circ\sin^2 72^\circ$.

2.195. Докажите тождество:

1) $\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{17\pi}{8}-2\alpha\right)=-\frac{\cos 4\alpha}{\sqrt{2}}$;

2) $\cos^2\left(\frac{7\pi}{8}-2\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{9\pi}{8}-2\alpha\right)=-\frac{\sin 4\alpha}{\sqrt{2}}$;

3) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha=\frac{1}{8}(5+3\cos 4\alpha)$;

4) $\cos^8\alpha-\sin^8\alpha=\frac{1}{4}\cos 2\alpha(3+\cos 4\alpha)$.

Адукацыйны партал www.adu.by

2.196. Упростите выражение A:

1) $A=\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)$;

2) $A=\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-\alpha\right)$;

3) $A=\cos^4\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{9\pi}{4}-2\alpha\right)$;

4) $A=\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)-\sin^4\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

2.197. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения A:

1) $A=4\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha$; 2) $A=2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$;

3)* $A=4\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; 4)* $A=\sin^4\alpha+2\cos^4\alpha$.

Упростите выражение A (**2.198—2.199**).

2.198. 1) $A=\sin10°+\sin20°+\sin30°+\sin40°+\sin50°$;

2) $A=\sin12°+\sin24°+\sin36°+\sin48°+\sin60°$;

3) $A=\cos20°+\cos40°+\sin10°+\cos80°+\cos100°$;

4) $A=\cos6°+\cos12°+\cos18°+\cos24°+\cos30°$.

2.199*. 1) $A=\sin\frac{\pi}{17}+\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{3\pi}{17}$;

2) $A=\sin\frac{\pi}{33}+\sin\frac{2\pi}{33}+\sin\frac{3\pi}{33}$;

3) $A=\cos\frac{2\pi}{31}+\cos\frac{4\pi}{31}+\cos\frac{6\pi}{31}$;

4) $A=\cos\frac{\pi}{25}+\cos\frac{2\pi}{25}+\cos\frac{3\pi}{25}$;

5) $A=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}$;

6) $A=\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\cos\frac{7\pi}{19}$.

Глава 3

Тригонометрические функции

3.1. Тригонометрические функции. Периодичность

Пусть x — действительное число. Рассмотрим угол, радианной мерой которого является это число x. Для этого угла определено число $\sin x$.

Таким образом, каждому действительному числу x ставится в соответствие одно определенное число $\sin x$. Тем самым на множестве R действительных чисел определяется функция

$$y=\sin x.$$

Аналогично определяется функция

$$y=\cos x.$$

Пусть теперь действительное число $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Рассмотрим угол, радианной мерой которого является число x. Для такого угла определено число $\operatorname{tg}x$.

Таким образом, каждому действительному числу, не равному $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, ставится в соответствие одно определенное число $\operatorname{tg}x$. Тем самым на множестве действительных чисел $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, определяется функция

$$y=\operatorname{tg}x.$$

Аналогично на множестве действительных чисел $x\neq\pi k$, $k\in Z$, определяется функция

$$y=\operatorname{ctg}x.$$

Мы видим, что синус, косинус, тангенс и котангенс можно рассматривать как функции *числового аргумента*. Эти функции называются *тригонометрическими*.

В этой главе мы будем изучать тригонометрические функции. Их характерным свойством является периодичность.

дукацыйны партал www.adu.by

2.196. Упростите выражение A:

1) $A=\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\alpha}{4}\right)-\cos^2\left(\frac{11\pi}{8}+\frac{\alpha}{4}\right)$;

2) $A=\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-\alpha\right)$;

3) $A=\cos^4\left(\frac{5\pi}{4}-2\alpha\right)-\sin^4\left(\frac{9\pi}{4}-2\alpha\right)$;

4) $A=\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)-\sin^4\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)$.

2.197. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения A:

1) $A=4\sin^2\alpha+5\cos^2\alpha$; 2) $A=2\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$;

3)* $A=4\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$; 4)* $A=\sin^4\alpha+2\cos^4\alpha$.

Упростите выражение A (**2.198—2.199**).

2.198. 1) $A=\sin10°+\sin20°+\sin30°+\sin40°+\sin50°$;

2) $A=\sin12°+\sin24°+\sin36°+\sin48°+\sin60°$;

3) $A=\cos20°+\cos40°+\sin10°+\cos80°+\cos100°$;

4) $A=\cos6°+\cos12°+\cos18°+\cos24°+\cos30°$.

2.199*. 1) $A=\sin\frac{\pi}{17}+\sin\frac{2\pi}{17}+\sin\frac{3\pi}{17}$;

2) $A=\sin\frac{\pi}{33}+\sin\frac{2\pi}{33}+\sin\frac{3\pi}{33}$;

3) $A=\cos\frac{2\pi}{31}+\cos\frac{4\pi}{31}+\cos\frac{6\pi}{31}$;

4) $A=\cos\frac{\pi}{25}+\cos\frac{2\pi}{25}+\cos\frac{3\pi}{25}$;

5) $A=\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}$;

6) $A=\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\cos\frac{7\pi}{19}$.

Глава 3

Тригонометрические функции

3.1. Тригонометрические функции. Периодичность

Пусть x — действительное число. Рассмотрим угол, радианной мерой которого является это число x. Для этого угла определено число $\sin x$.

Таким образом, каждому действительному числу x ставится в соответствие одно определенное число $\sin x$. Тем самым на множестве R действительных чисел определяется функция

$$y=\sin x.$$

Аналогично определяется функция

$$y=\cos x.$$

Пусть теперь действительное число $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$. Рассмотрим угол, радианной мерой которого является число x. Для такого угла определено число $\operatorname{tg}x$.

Таким образом, каждому действительному числу, не равному $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, ставится в соответствие одно определенное число $\operatorname{tg}x$. Тем самым на множестве действительных чисел $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, определяется функция

$$y=\operatorname{tg}x.$$

Аналогично на множестве действительных чисел $x\neq\pi k$, $k\in Z$, определяется функция

$$y=\operatorname{ctg}x.$$

Мы видим, что синус, косинус, тангенс и котангенс можно рассматривать как функции *числового аргумента*. Эти функции называются *тригонометрическими*.

В этой главе мы будем изучать тригонометрические функции. Их характерным свойством является периодичность.

дукацыйны партал www.adu.by

Определение. Пусть $T \neq 0$. **Функция f называется *периодической с периодом T*, если для любого значения x из области определения функции числа $x+T$ и $x-T$ также принадлежат области определения и при этом верно равенство**

$$f(x+T)=f(x).$$

Для периодической функции f верно и равенство

$$f(x-T)=f(x).$$

Действительно, если $x \in D(f)$, то $x-T \in D(f)$, и

$$f(x)=f((x-T)+T)=f(x-T).$$

Поскольку при $T=2\pi$ тригонометрические функции синус, косинус, тангенс и котангенс удовлетворяют всем условиям этого определения (убедитесь в этом), то все они являются периодическими с периодом 2π.

Пример 1. Верно ли, что периодом функции $y=\sin x$ является число:

а) 10π; б) π; в) 2?

Решение. а) Функция $y=\sin x$ периодическая с периодом 2π. Прибавляя к аргументу x этот период несколько раз (в частности, 5 раз), мы не меняем значения функции.

Поэтому

$$\sin(x+10\pi)=\sin(x+2\pi\cdot 5)=\sin x,$$

и, значит, число 10π является периодом функции $y=\sin x$.

б) Если число π — период функции $y=\sin x$, то при любых $x \in R$ должно быть верным равенство $\sin x=\sin(x+\pi)$. А оно не верно, например, при $x=-\frac{\pi}{2}$. Значит, число π не является периодом функции $y=\sin x$.

в) Если число 2 — период функции $y=\sin x$, то при любых $x \in R$ должно быть верным равенство $\sin(x+2)=\sin x$. Но, например, при $x=0$ получим $\sin 2=\sin 0$ — неверное числовое равенство. Значит, число 2 не является периодом функции $y=\sin x$.

Ответ: а) да; б) нет; в) нет.

Для некоторых тригонометрических функций можно указать и меньший, чем 2π, положительный период.

Пример 2. Доказать, что число π является периодом функции:

а) $y=\operatorname{tg} x$; б) $y=\operatorname{ctg} x$.

Доказательство. а) Для любого значения $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$, числа $x+\pi$ и $x-\pi$ также не равны $\frac{\pi}{2}+\pi k$ ни при каких $k \in Z$, т. е. принадлежат области определения тангенса. Остается сослаться на соответствующую формулу приведения: $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$.

Таким образом, число π является периодом функции $y=\operatorname{tg} x$. ☒

б) Докажите самостоятельно.

Пример 3. Функция задана формулой $y=\sin x$ на множестве D. Верно ли, что эта функция периодическая с периодом 2π, если:

а) $D=[-2\pi;\ 10\pi]$; б) $D=Z$?

Решение. а) Так как $10\pi \in D$, а $10\pi+2\pi \notin D$, то 2π — не период. И вообще, функция с областью определения $[-2\pi;\ 10\pi]$ не может быть периодической.

Аналогичными рассуждениями можно показать, что заданная функция не может иметь и отрицательного периода.

б) Неверно, так как число $0 \in D$, а число $0+2\pi \notin Z=D$. (Вместо нуля можно было бы взять любое целое число.)

Ответ: а) неверно; б) неверно.

Пример 4. Доказать, что число $\frac{\pi}{2}$ является периодом функции

$$y=\cos 4x.$$

Доказательство. Областью определения функции $y=\cos 4x$ является множество действительных чисел R.

Равенство $\cos 4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 4x$ верно при любом $x \in R$.

Таким образом, число $\frac{\pi}{2}$ — период функции $y=\cos 4x$. ☒

Теорема. Справедливы следующие утверждения:

а) 2π — наименьший положительный период функции $y=\sin x$ и функции $y=\cos x$;

б) π — наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg} x$ и функции $y=\operatorname{ctg} x$.

Адукацыйны партал www.adu.by

Доказательство. а) Напомним, что 2π — положительный период функции $y=\sin x$. Пусть теперь $T \leqslant 2\pi$ — положительный период функции $y=\sin x$.

Подставляя в тождество $\sin(x+T)=\sin x$ значение $x=0$, получаем $\sin T=0$. Значит, $T=\pi$ или $T=2\pi$. Но

$$\sin(x+\pi)=-\sin x,$$

поэтому π не является периодом функции $y=\sin x$. Следовательно, $T=2\pi$.

Таким образом, 2π — наименьший положительный период функции $y=\sin x$. ☒

Доказательство для функции $y=\cos x$ аналогичное, проведите его самостоятельно.

б) Напомним, что π — положительный период функции $y=\operatorname{tg} x$. Пусть теперь $T \leqslant \pi$ — положительный период функции $y=\operatorname{tg} x$. Подставляя в тождество $\operatorname{tg}(x+T)=\operatorname{tg} x$ значение $x=0$, получаем $\operatorname{tg} T=0$. Следовательно, $T=\pi$.

Таким образом, π — наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg} x$. ☒

Доказательство для функции $y=\operatorname{ctg} x$ аналогичное, проведите его самостоятельно.

▲ **Пример 5*.** Указать наименьший положительный период функции

$$y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}.$$

Решение. Найдем область определения функции $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$:

$$\frac{x}{3}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\ \text{т. е. } x\neq\frac{3\pi}{2}+3\pi k,\ k\in Z.$$

Пусть T — наименьший положительный период функции $y=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$. Тогда T — наименьшее положительное число, удовлетворяющее условию

$$\operatorname{tg}\frac{x}{3}=\operatorname{tg}\frac{x+T}{3},$$

т. е.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{3}=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{T}{3}\right).$$

Поскольку π — наименьший положительный период функции тангенс (см. теорему), то $\frac{T}{3}=\pi$, т. е. $T=3\pi$.

Ответ: 3π. ▲

1. Поясните, почему формулой $y=\sin x$ ($y=\cos x$) на множестве R задается функция.
2. Поясните, почему формулой $y=\operatorname{tg} x$ на множестве всех действительных чисел $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, задается функция.
3. Поясните, почему формулой $y=\operatorname{ctg} x$ на множестве всех действительных чисел $x\neq\pi n$, $n\in Z$, задается функция.
4. Сформулируйте определение периодической функции с периодом T.
5. Докажите, что функция синус (косинус) является периодической с периодом 2π.
6. Докажите, что функция тангенс (котангенс) является периодической с периодом π.
7. Докажите, что наименьшим положительным периодом функции синус (косинус) является 2π.
8. Докажите, что наименьшим положительным периодом функции тангенс (котангенс) является π.

Упражнения

3.1°. Какие из чисел 4, 5, 9, 13, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 7π, 10π, 11π, 12π, 16π, 21π являются периодами функции:

1) $y=\sin x$; 2) $y=\cos x$; 3) $y=\operatorname{tg} x$;

4) $y=\operatorname{ctg} x$; 5) $y=\sin\frac{x}{3}$; 6) $y=\cos 2x$;

7) $y=\operatorname{ctg} 2x$; 8) $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$?

3.2. Для функции из упражнения 3.1 назовите ее наименьший положительный период.

3.3. Докажите, что функция $y=f(x)$ периодическая с периодом T, если:

1) $f(x)=3\sin x$, $T=2\pi$; 2) $f(x)=6\cos x$, $T=2\pi$;

3) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$, $T=-\pi$; 4) $f(x)=2\cos 4x$, $T=-\frac{\pi}{2}$.

3.4. На множестве D задана функция $y=f(x)$. Верно ли, что функция f периодическая, если:

1) $f(x)=\cos x$; 2) $f(x)=\sin x$;

3) $f(x)=\operatorname{tg} x$; 4) $f(x)=\operatorname{ctg} x$,

а D — один из промежутков:

а) $[-2\pi;\ \pi]$; б) $(-\infty;\ 0]$; в) $[-4\pi;\ 20\pi]$; г) $[0;\ +\infty)$; д) $[-3\pi;\ 5\pi]$; е) Z; ж) $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; з) $[-\pi;\ 2\pi]$?

Адукацыйны партал www.adu.by

3.5*. Для функции f укажите T — ее наименьший положительный период, если:

1) $f(x)=-4\operatorname{ctg}x+2$; 2) $f(x)=6\operatorname{tg}x-1$;

3) $f(x)=\frac{1}{4}\cos 3x-6$; 4) $f(x)=-2\sin 2x+3$;

5) $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$; 6) $f(x)=8\cos 4x$;

7) $f(x)=\frac{3}{4}\cos\frac{x}{2}$; 8) $f(x)=\frac{5}{2}\sin\frac{x}{3}$;

9) $f(x)=\frac{1}{5}\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; 10) $f(x)=10\operatorname{ctg}\frac{x}{6}$.

3.6. Для каждой функции из упражнения 3.5 докажите, что:

1) число -12π является ее периодом;

2) число 24π является ее периодом;

3) число $\frac{\pi}{7}$ не является ее периодом;

4) число $-\frac{\pi}{5}$ не является ее периодом.

Укажите область определения функции f и ее наименьший положительный период (3.7—3.8).

3.7. 1) $f(x)=-\sin(-x)$; 2) $f(x)=-\cos(-x)$;

3) $f(x)=(-1)^{13}\operatorname{tg}(-x)$; 4) $f(x)=(-1)^{46}\operatorname{ctg}(-x)$;

5) $f(x)=\operatorname{ctg}x\sin x+\cos x$; 6) $f(x)=\sin x+\operatorname{tg}x\cos x$;

7) $f(x)=\frac{1-(\sin x+\cos x)^2}{\operatorname{ctg}x\sin x}$; 8) $f(x)=\frac{1-(1-\sin x)(1+\cos x)}{\operatorname{tg}x\cos x}$;

9) $f(x)=4\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)-\sin x-1$;

10) $f(x)=-1+\cos x+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$.

3.8. 1) $f(x)=\sqrt{\sin^2(-x)}$; 2) $f(x)=\sqrt{\cos^2(-x)}$;

3) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg}^2(-x)}$; 4) $f(x)=\sqrt{\operatorname{ctg}^2(-x)}$;

5) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1}$; 6) $f(x)=\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-1}$;

7) $f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$; 8) $f(x)=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}$;

9) $f(x)=\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$; 10) $f(x)=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

дукацыйны партал www.adu.by

▲3.2. Периодические функции

Пример 1. На рисунке 96 изображена часть графика периодической функции $y=f(x)$ с областью определения $D(f)=R$ и наименьшим положительным периодом T. Чему равно значение функции $f(x)$ при x, равном:

а) T; б) $3+4T$; в) 29?

Решение. На рисунке 96 видно, что $T=5$.

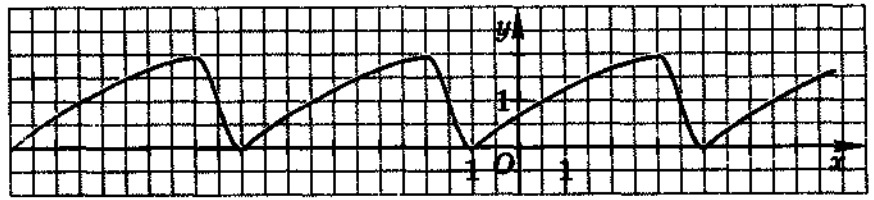


Рис. 96

По определению периодической функции для любого x из области определения функции верно равенство $f(x+T)=f(x)$. Используя это равенство, найдем значения $f(x)$ для случаев а) — в).

а) $f(T)=f(0+T)=f(0)=0{,}75$ (см. рис. 96; здесь $x=0$).

б) $f(3+4T)=f(3)=2$ (см. рис. 96; здесь $x=3$).

в) Поскольку $T=5$, то, представляя 29 в виде $29=-1+30=-1+6T$, получаем (см. рис. 96; здесь $x=-1$):

$$f(29)=f(-1+6T)=f(-1)=0.$$

Ответ: а) 0,75; б) 2; в) 0.

Пример 2. На рисунке 97 изображена часть графика периодической функции f с областью определения $D(f)=R$ и наименьшим положительным периодом $T=4$. Изобразить график функции $y=f(x)$ на промежутке: а) $[-1;\ 11]$; б) $[-9;\ 7]$.

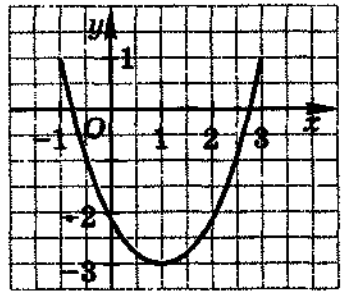


Рис. 97

Решение. а) Длина промежутка $[-1;\ 3]$ равна 4, т. е. наименьшему положительному периоду T функции. Чтобы получить изображение графика функции f на промежутке $[-1;\ 11]$, сдвинем заданное на рисунке 97 изображение на 4 единицы (т. е. на T единиц)

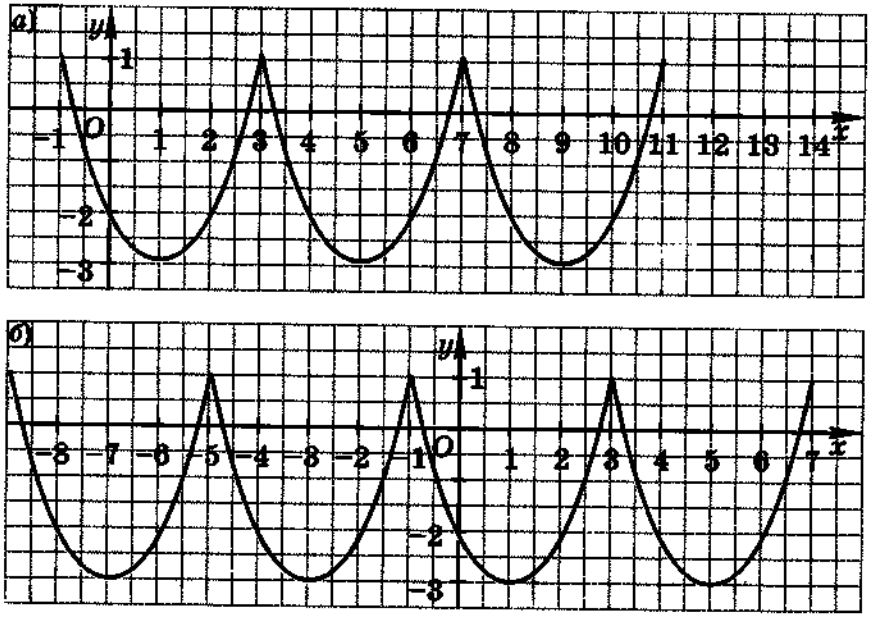


Рис. 98

вправо вдоль оси Ox и еще раз вправо на 4 единицы. На рисунке 98, *а* изображен полученный график функции f на отрезке $[-1; 11]$.

б) На рисунке 98, *б* изображен график функции f на отрезке $[-9; 7]$; чтобы его получить, линию, изображенную на рисунке 97, сдвинем вдоль оси Ox влево (дважды) и один раз вправо.

! Изображение графика периодической функции f с наименьшим положительным периодом T можно получить так: изобразить часть этого графика на одном из промежутков области определения, длина которого равна T, а затем последовательно сдвигать эту линию влево и вправо вдоль оси Ox на T.

Пример 3. На рисунке 99 изображена часть графика периодической функции f с областью определения, состоящей из всех чисел $x \neq -2 + 3n$, $n \in Z$, и наименьшим положительным периодом $T = 3$. Изобразить график функции $y = f(x)$.

Решение. Длина промежутка $[-4; -1]$ равна 3, т. е. наименьшему положительному периоду данной функции f. Получить изображение графика функции f можно, сдвигая изображенную на рисунке 99 часть графика влево и вправо вдоль оси Ox (рис. 100).

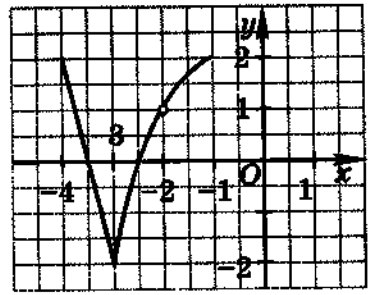


Рис. 99

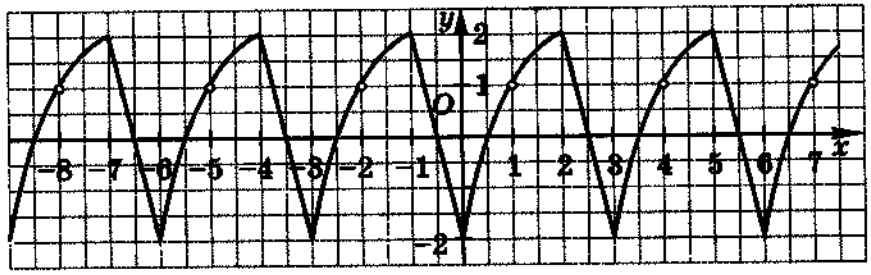


Рис. 100

Теорема 1. Если число T — период функции f, то при любом целом $n \neq 0$ число nT — также период этой функции.

Доказательство. Пусть $n = -1$. Так как T — период функции f, то $T \neq 0$.

Пусть $x \in D(f)$; по определению периодической функции имеем: $x + (-T) = x - T \in D(f)$, $x - (-T) = x + T \in D(f)$, а также $f(x - T) = f((x - T) + T) = f(x)$.

Это означает, что $-T$ — период функции f.

Пусть $n = 2$. Так как $T \neq 0$, то $2T \neq 0$.

Пусть $x \in D(f)$. По определению периодической функции $x + T \in D(f)$, следовательно, $(x + T) + T = x + 2T \in D(f)$, а также $x - T \in D(f)$, следовательно, $(x - T) - T = x - 2T \in D(f)$.

И наконец, $f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x)$.

Это означает, что $2T$ — период функции f. ☒

Аналогично доказывается, что если $2T$ — период, то $3T = 2T + T$ — период, если $3T$ — период, то $4T = 3T + T$ — период и т. д.

Адукацыйны партал www.adu.by

Теорема 2. Если $y = f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то $y = f(px)$ — периодическая функция с периодом $\frac{T}{p}$.

Доказательство. Область определения функции $y = f(px)$ состоит из тех чисел x, для которых $px \in D(f)$. Но если $px \in D(f)$, то области определения $D(f)$ принадлежит и число $px + T$, а это можно записать так: $p\left(x + \frac{T}{p}\right) \in D(f)$.

Таким образом, если число x принадлежит области определения функции $y = f(px)$, то и число $x + \frac{T}{p}$ принадлежит области определения этой функции.

Аналогично доказывается, что если число x принадлежит области определения функции $y = f(px)$, то и число $x - \frac{T}{p}$ принадлежит области определения этой функции. (Проведите доказательство самостоятельно.)

Остается заметить, что:

$$f\left(p\left(x + \frac{T}{p}\right)\right) = f(px + T) = f(px). \boxtimes$$

Поскольку область определения периодической функции неограниченна, то функции с ограниченной областью определения не могут быть периодическими.

Кроме того, если хотя бы одно число не принадлежит области определения периодической функции, то ей не принадлежит бесконечно много чисел.

Пример 4. Известно, что функция f с областью определения D — периодическая с периодом T. Может ли быть:

а) $D = N$; б) $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$?

Решение. а) Нет, не может, так как по определению периодической функции, если, например, число 1 принадлежит множеству $D(f)$, то числа $1 + T$ и $1 - T$ принадлежат этому множеству. Но так как $T \neq 0$, то одно из этих чисел не будет натуральным и не будет принадлежать множеству $D(f) = N$.

б) Нет, не может, так как число T принадлежит множеству $D(f)$, а число $T - T = 0$ не принадлежит ему.

1. При каких преобразованиях график периодической функции с периодом T совмещается сам с собой?
2. Назовите особенности области определения периодической функции.
3. Приведите пример числового множества, которое не может быть областью определения периодической функции.
4. Функция f — периодическая с периодом T; какие еще числа могут быть периодом функции f?
5. Функция $y = f(x)$ — периодическая с периодом T. Укажите период функции:

а) $y = f(3x)$; б) $y = f\left(\frac{x}{5}\right)$; в) $y = f(px)$, $p > 0$.

Упражнения

3.9. Может ли быть периодической функция f, заданная на множестве R, если она:

1) возрастающая на R; 2) убывающая на R?

3.10. На рисунке 101 изображена часть графика периодической функции f, определенной на множестве R, с периодом T, где $0 < T < 8$. Укажите наименьшее значение T. Чему равно значение функции $f(x)$ при x, равном:

1) $0 + T$; 2) $2 + T$; 3) $12 + 6T$;
4) $8 + 3T$; 5) 18; 6) 32?

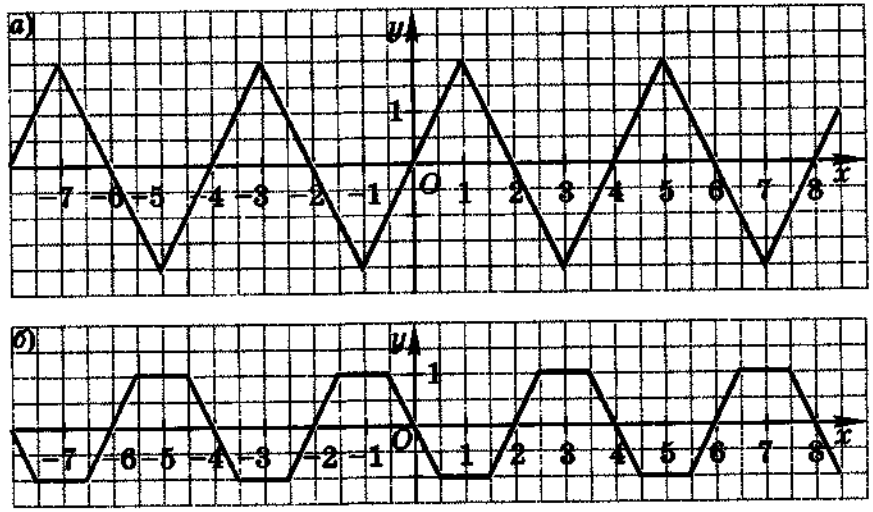


Рис. 101

Адукацыйны партал www.adu.by

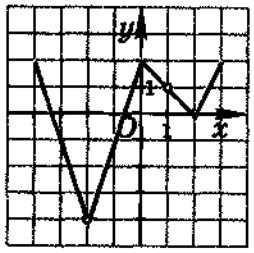


Рис. 102

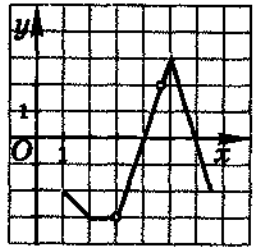


Рис. 103

3.11. На каждом из рисунков 102, 103 изображена часть графика периодической функции f на промежутке, длина которого равна ее наименьшему положительному периоду T. Определите наименьший положительный период T функции f и изобразите ее график на любом промежутке, длина которого равна:

1) $2T$; 2) $3T$; 3) $5T$; 4) $4T$.

3.12. Функция $y=f(x)$ — периодическая с периодом $T=2$ и $D(f)=R$. На промежутке D значение функции f совпадает со значением функции $y=g(x)$. Найдите значение функции $f(a)$, если:

1) $D=[0;\ 2]$, $g(x)=2x^2-4x$ и $a=3$;
2) $D=[-1;\ 1]$, $g(x)=x^3-x$ и $a=2$;
3) $D=[-2;\ 0]$, $g(x)=x^4+x^2$ и $a=5$;
4) $D=[3;\ 5]$, $g(x)=3x^3+3x^2$ и $a=-8$.

3.13. Докажите, что функция f не является периодической, если:

1) $f(x)=2x-5$; 2) $f(x)=4x+8$; 3) $f(x)=\frac{1}{x+5}$;
4) $f(x)=\frac{1}{1-x}$; 5) $f(x)=\sqrt{x}$; 6) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$;
7) $f(x)=x\sin x$; 8) $f(x)=x\cos x$;
9) $f(x)=2x+\cos x$; 10) $f(x)=\sin x-4x$.

3.14. Известно, что функция f периодическая с периодом T. Может ли областью определения $D(f)$ этой функции быть множество:

1) Z; 2) N; 3) $[-1;\ 2]$;
4) $[-8;\ 8]$; 5) $(-\infty;\ 0)$; 6) $(0;\ +\infty)$;
7) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$;
8) $(-\infty;\ -6)\cup(-6;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$?

Адукацыйны партал

3.15. Может ли областью определения периодической функции быть множество всех действительных чисел x, таких, что:

1) $|x|\neq -5$; 2) $x\neq\pm 13$;
3) $x\neq\pm 9,\ x\neq\pm 2$; 4) $|x|\neq 4,\ |x|\neq 7$;
5) $x\neq 3p-2,\ p\in Z$; 6) $x\neq 2p-1,\ p\in Z$;
7) $x\neq\frac{3\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$; 8) $x\neq\pi+\frac{\pi k}{2},\ k\in N$?

Укажите наименьший положительный период функции f (3.16—3.17).

3.16. 1) $f(x)=4\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $f(x)=\frac{2}{5}\cos\left(\frac{\pi}{6}-5x\right)$;
3) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12}-0{,}2x\right)$; 4) $f(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{24}-1{,}5x\right)$;
5) $f(x)=\cos x+\cos 3x$; 6) $f(x)=\sin 2x-\sin 4x$;
7)* $f(x)=3\sin 2x+4\cos 2x$; 8)* $f(x)=5\cos 7x-12\cos 7x$.

3.17. 1) $f(x)=\sin\pi x$; 2) $f(x)=\cos\pi x$;
3) $f(x)=\operatorname{tg}(\pi x+1)$; 4) $f(x)=\operatorname{ctg}(2-\pi x)$;
5) $f(x)=\sin^2 3x$; 6) $f(x)=\cos^2\frac{2x}{3}$;
7) $f(x)=|\cos 1{,}5x|$; 8) $f(x)=|\sin 0{,}5x|$.

3.18. Укажите периодическую функцию f, у которой:

1) нет наименьшего положительного периода;
2) периодом является любое действительное число.

3.19. Задайте формулой периодическую функцию f с наименьшим положительным периодом T, равным:

1) 2; 2) 5; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{3}{2}$.

3.20*. Функция $y=f(x)$ периодическая с наименьшим положительным периодом $T=3$ и $D(f)=R$. На промежутке $[-1;\ 2)$ ее значения совпадают со значениями функции $y=g(x)$. Изобразите график функции f, если:

1) $g(x)=x-1$; 2) $g(x)=1-x$; 3) $g(x)=-x^2$;
4) $g(x)=x^2$; 5) $g(x)=|x|$; 6) $g(x)=-|x|$;
7) $g(x)=-x^3$; 8) $g(x)=x^3$.

3.3. Функция $y = \sin x$

Рассмотрим ***функцию синус***, заданную формулой $y = \sin x$, с областью определения — множеством R.

Изобразим график функции $y = \sin x$. Сделаем это сначала на промежутке длиной, равной периоду синуса. Для этого заполним таблицу значений функции синус для значений аргумента на промежутке $[0; 2\pi]$, взятых через $\frac{\pi}{8}$, с точностью до 0,1 (приближенные значения синуса можно найти, используя тригонометрическую окружность (см. рис. 72)).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\sin x$	0	0,4	0,7	0,9	1	0,9	0,7	0,4	0

x	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$\sin x$	0	–0,4	–0,7	–0,9	–1	–0,9	–0,7	–0,4	0

Отметив эти точки на координатной плоскости (рис. 104) и соединив их плавной линией (рис. 105, получим изображение графика функции $y = \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Поскольку, как было показано в п. 3.1, функция синус — периодическая с наименьшим положительным периодом, равным 2π, то ее значения повторяются через 2π. Нами получено изображение графика на промежутке, длина которого равна 2π. Сдвигая эту линию вправо и влево вдоль оси Ox на 2π, получим изображение графика функции $y = \sin x$ (рис. 106).

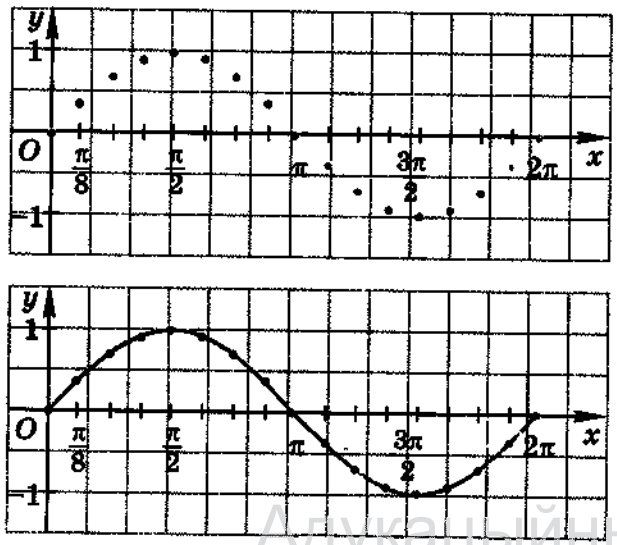


Рис. 104

Рис. 105

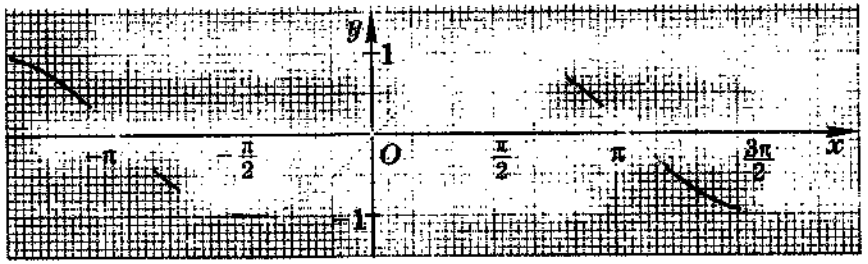


Рис. 106

График функции $y = \sin x$ называется ***синусоидой***.

Изображение синусоиды дает наглядное представление обо всех свойствах функции синус.

Теорема (*о свойствах функции* $y = \sin x$).

1. Область определения функции $y = \sin x$ — множество R.

2. Область (множество) значений функции $y = \sin x$ — промежуток $[-1; 1]$.

3. Функция $y = \sin x$ периодическая с периодом 2π.

4. Наименьшее значение $y = -1$ функция $y = \sin x$ принимает в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Наибольшее значение $y = 1$ — в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$.

5. Нулями функции $y = \sin x$ являются значения аргумента $x = \pi k$, $k \in Z$.

6. Функция $y = \sin x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $(\pi + 2\pi; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$, и положительные значения на каждом из промежутков $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$.

7. Функция $y = \sin x$ нечетная.

8. Функция $y = \sin x$ возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$, и убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$.

Адукацыйны партал www.adu.by

Доказательство. Свойства 1 и 3 были установлены в п. 3.1.

Свойства 2, 4—7 можно увидеть на изображении графика функции $y = \sin x$ на рисунке 106 (еще говорят: «прочитать свойства по графику»). Они фактически были обоснованы в п. 2.4 и 2.5.

Свойство 8 тоже можно прочитать по графику. Промежутки возрастания и убывания можно также указать, используя единичную окружность.

▲Проведем доказательство свойства 8. Рассмотрим функцию $y = \sin x$ на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Пусть x_1, $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $x_1 < x_2$. Тогда $\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\cos\frac{x_2 + x_1}{2} > 0$.

Действительно, $0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ (докажите это). Значит, $\sin\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. А так как $-\frac{\pi}{2} < \frac{x_2 + x_1}{2} < \frac{\pi}{2}$ (докажите это), то $\cos\frac{x_2 + x_1}{2} > 0$. Итак, $\sin x_2 > \sin x_1$.

Таким образом, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ большему значению аргумента соответствует большее значение функции, а это означает, что функция $y = \sin x$ на этом промежутке возрастает. В силу периодичности она возрастает на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. ⊠

Аналогично доказывается, что функция $y = \sin x$ убывает на промежутке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, а следовательно и на каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. ▲

Напомним, что по определению на промежутке возрастания (убывания) функции f, если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$). Верно и обратное утверждение, которое мы часто будем использовать в дальнейшем:

на промежутке возрастания функции f, если $f(x_2) > f(x_1)$, то $x_2 > x_1$, а на промежутке убывания функции f, если $f(x_2) < f(x_1)$, то $x_2 > x_1$.

Докажите это утверждение методом от противного.

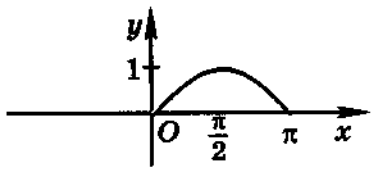


Рис. 107

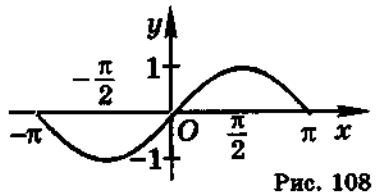


Рис. 108

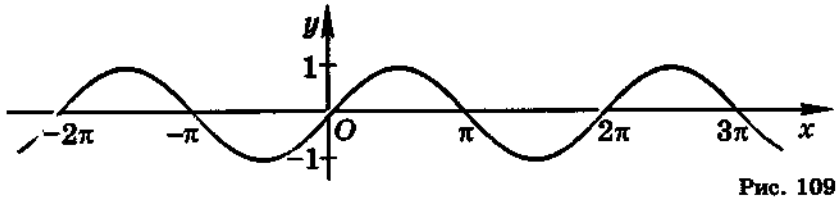


Рис. 109

Можно было получить изображение графика функции синус несколько иначе, принимая во внимание не только периодичность функции, но и ее нечетность.

Для этого достаточно получить изображение графика на промежутке $[0; \pi]$, затем использовать симметрию графика нечетной функции относительно начала координат и периодичность функции (рис. 107, 108, 109).

Пример 1. Сравнить значения выражений $\sin 7$, $\sin 1$, $\sin 4$.

Решение. Имеем $\sin 7 = \sin(7 - 2\pi) \approx \sin 0{,}72 < \sin 1$, так как 0,72 и 1 принадлежат промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а на этом промежутке функция $y = \sin x$ возрастает и ее значения неотрицательны.

Так как угол, радианная мера которого равна 4, оканчивается в III четверти, то $\sin 4 < 0$.

Ответ: $\sin 4 < \sin 7 < \sin 1$.

Пример 2. Решить уравнение $\sin(3x - 1) = -1$.

Решение. Решениями уравнения $\sin u = -1$ являются значения $u = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$, при которых функция $y = \sin u$ принимает наименьшие значения, равные -1. При $u = 3x - 1$ имеем:

$$3x - 1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,\ x = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3},\ k \in Z.$$

Ответ: $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

Адукацыйны партал www.adu.by

Пример 3*. Решить неравенство:

а) $\sin\frac{x}{4} > 0$;

б) $\sin(5x+8) < 1$.

Решение: а) Решение неравенства $\sin u > 0$ совпадает с промежутками, на которых функция $y = \sin u$ принимает положительные значения, т. е. $2\pi k < u < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (эти промежутки легко прочесть на схематическом графике функции синус или на единичной окружности).

При $u = \frac{x}{4}$ имеем $2\pi k < \frac{x}{4} < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, т. е.

$$8\pi k < x < 4\pi + 8\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) Поскольку областью (множеством) значений функции $y = \sin u$ является промежуток $E = [-1;\ 1]$, то неравенство $\sin u < 1$ верно при всех значениях u, кроме тех, где $\sin u = 1$. Итак, $u \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. При $u = 5x + 8$ имеем:

$$5x + 8 \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\ x \neq -\frac{8}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: а) $(8\pi k;\ 4\pi + 8\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $x \neq -\frac{8}{5} + \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4. Решить неравенство $\sin x < \frac{1}{2}$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. На промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ принимает значение $\frac{1}{2}$ в точке $x = \frac{5\pi}{6}$ и убывает от 1 до –1.

Поскольку $\sin\frac{3\pi}{2} \leqslant \sin x < \sin\frac{5\pi}{6}$, то $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ (рис. 110).

Ответ: $\left(\frac{5\pi}{6};\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

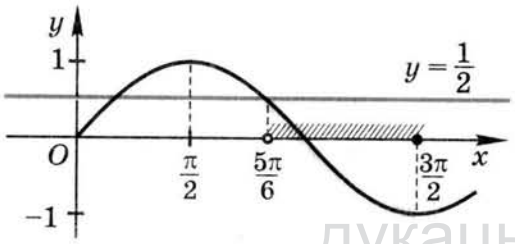


Рис. 110

1. Назовите основные свойства функции $y = \sin x$.
2. Изобразите график функции $y = \sin x$. Как называется этот график?
3. Как на изображении графика функции $y = \sin x$ отражаются свойства:
   а) периодичность функции;
   б) нечетность функции?
4. Используя изображение графика функции $y = \sin x$, укажите для нее:
   а) наименьшее (наибольшее) значение;
   б) промежутки знакопостоянства и нули;
   в) промежутки убывания (возрастания).
5. Чему равен наименьший положительный период функции $y = \sin x$?

6*. Докажите, что функция $y = \sin x$ возрастает на каждом из промежутков вида $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7*. Докажите, что функция $y = \sin x$ убывает на каждом из промежутков вида $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

3.21°. Укажите область определения и область (множество) значений функции f:

1) $f(x) = \sin x + 1$; 2) $f(x) = \sin x - 2$;

3) $f(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3}$; 4) $f(x) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 3$;

5) $f(x) = |\sin x|$; 6) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.

3.22. Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции:

1) $f(x) = \sin x - 2{,}5$; 2) $f(x) = \sin x + 1{,}5$;

3) $f(x) = \sin x - 1$; 4) $f(x) = \sin x + 1$.

3.23. Расположите в порядке убывания числа:

1) $\sin\frac{9\pi}{10}$; $\sin\frac{6\pi}{5}$; $\sin\frac{7\pi}{15}$; $\sin\frac{12\pi}{5}$;

2) $\sin\left(-\frac{25\pi}{9}\right)$; $\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; $\sin\left(-\frac{4\pi}{5}\right)$; $\sin\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$;

дукацыйны партал www.adu.by

3) $\sin(-0{,}3)$; $\sin(-2)$; $\sin(-1{,}5)$; $\sin(-4{,}5)$;
4) $\sin 5{,}4$; $\sin 3{,}1$; $\sin 1{,}2$; $\sin 1{,}6$.

3.24°. Сравните:

1) $\sin\frac{3\pi}{7}$ и $\sin\frac{2\pi}{9}$;
2) $\sin\frac{5\pi}{12}$ и $\sin\frac{7\pi}{8}$;
3) $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ и $\sin\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$;
4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right)$ и $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$;
5) $\sin(-3{,}14)$ и $\sin(-3{,}2)$;
6) $\sin(-4{,}78)$ и $\sin(-5)$.

3.25°. Установите, четной или нечетной является функция f:

1) $f(x)=\sin^2 x$;
2) $f(x)=x^7\sin x$;
3) $f(x)=x^5+\sin^3 x$;
4) $f(x)=x^3-\sin^9 x$;
5) $f(x)=\frac{4^3\sin^2 x}{x^2}$;
6) $f(x)=\frac{3^4\sin\frac{x}{2}}{x^5}$;
7) $f(x)=x\sin^2 x$;
8) $f(x)=x^4\sin x$.

3.26°. Используя график функции $y=\sin x$ (см. рис. 106), сравните с нулем значение выражения:

1) $\sin\frac{4\pi}{15}$;
2) $\sin\frac{13\pi}{8}$;
3) $\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$;
4) $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$;
5) $\sin 2{,}3$;
6) $\sin 5{,}1$;
7) $\sin(-1{,}7)$;
8) $\sin(-4{,}9)$.

3.27°. Функция f задана формулой $y=\sin x$ на множестве D. Укажите для функции f:

а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки знакопостоянства, где $y<0$; е) промежутки знакопостоянства, где $y>0$; ж) нули, если:

1) $D=[0;\ 3\pi]$;
2) $D=[-\pi;\ 2\pi]$;
3) $D=\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$;
4) $D=\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}\right]$;
5) $D=\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{6}\right]$;
6) $D=\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{6}\right]$;
7) $D=[-1;\ 0]$;
8) $D=[0;\ 1]$.

3.28. Используя изображение синусоиды (см. рис. 106), найдите приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\sin 2$;
2) $\sin 1$;
3) $\sin(-4)$;
4) $\sin(-2)$;
5) $\sin 5{,}5$;
6) $\sin 3{,}8$.

3.29. Решите уравнение:

1) $\sin 6x=0$;
2) $\sin\frac{x}{3}=0$;
3) $\sin(2x+3)=1$;
4) $\sin(0{,}1x-5)=1$;
5) $\sin\left(\frac{3x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-1$;
6) $\sin\left(\frac{5x}{6}+\frac{7\pi}{12}\right)=-1$;
7) $\sin^2\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$;
8) $\left|\cos\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)\right|-1=0$.

3.30. Решите неравенство:

1) $\sin\frac{x}{6}\leqslant 0$;
2) $\sin 3x>0$;
3) $\sin(2x-2)>-1$;
4) $\sin(3x+1)\leqslant -1$;
5) $\sin(\pi-4x)\leqslant 1$;
6) $\sin(2x-\pi)>-1$.

3.31. Укажите, в каких точках промежутка $[-2\pi;\ 2\pi]$ определена функция, и изобразите ее график:

1) $y=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;
2) $y=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;
3) $y=\operatorname{tg}x\cos x$;
4) $y=1:\frac{1}{\sin x}$;
5) $y=\left(\sqrt{\sin x}\right)^2$;
6) $y=\left(\sqrt{\sin x+1}\right)^2-1$.

3.32. При каких значениях m существуют такие значения x, при которых будет верным равенство:

1) $2\sin x=m+1$;
2) $3\sin x=m-2$;
3) $\sin^2 x=m$;
4) $\sin^2 x-1=m$?

3.33. Решите на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ уравнение $\sin x=a$, если a равно:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;
3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $-\frac{1}{2}$;
5) 0,13;
6) $\frac{5}{7}$;
7) -1;
8) 1;
9) $\sqrt{3}$;
10) $-\sqrt{2}$.

дукацыйны партал www.adu.by

3.34. При каких значениях x из промежутка D функция $y = \sin x$ принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения, если:

1) $D = \left[-2\frac{5}{6}\pi;\ -\frac{\pi}{10}\right]$; 2) $D = \left[8\frac{2}{3}\pi;\ 10\frac{3}{8}\pi\right]$;

3) $D = (-0{,}9\pi;\ 4{,}1\pi]$; 4) $D = [-1{,}3\pi;\ 1{,}6\pi)$?

3.35*. Решите на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ неравенство: а) $\sin x < a$; б) $\sin x > a$; в) $\sin x \leqslant a$; г) $\sin x \geqslant a$, если a равно:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) -1;

6) 1; 7) $\frac{5}{7}$; 8) 0,43; 9) $\frac{\pi}{3}$; 10) $-\sqrt{\pi}$.

3.36*. Найдите на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ решения уравнения:

1) $\sin x = 0{,}3$; 2) $\sin x = 0{,}6$;

3) $\sin x = -0{,}7$; 4) $\sin x = -0{,}2$.

3.37*. Найдите на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ решения неравенства:

1) $\sin x < 0{,}7$; 2) $\sin x > 0{,}4$;

3) $\sin x \leqslant -0{,}4$; 4) $\sin x \geqslant -0{,}3$.

3.4. Функция $y = \cos x$

Рассмотрим ***функцию косинус***, заданную формулой $y = \cos x$, с областью определения — множеством $\boldsymbol{R}$.

Изобразим график функции $y = \cos x$. Сделаем это сначала на промежутке длиной, равной периоду косинуса. Для этого заполним таблицу значений функции косинус для значений аргумента на промежутке $[0;\ 2\pi]$, взятых через $\frac{\pi}{8}$, с точностью до 0,1 (приближенные значения косинуса можно найти, используя тригонометрическую окружность (см. рис. 72)).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\cos x$	1	0,9	0,7	0,4	0	–0,4	–0,7	–0,9	–1

x	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
$\cos x$	–1	–0,9	–0,7	–0,4	0	0,4	0,7	0,9	1

Адукацыйны партал www.adu.by

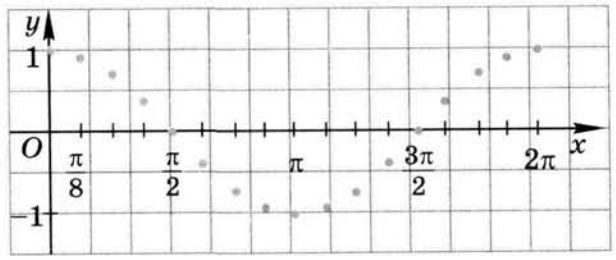


Рис. 111

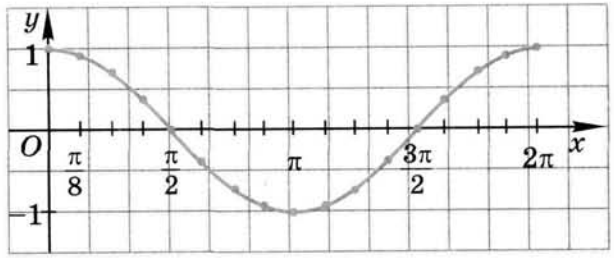


Рис. 112

Отметив эти точки на координатной плоскости Oxy (рис. 111) и соединив их плавной линией (рис. 112), получим изображение графика функции $y = \cos x$ на промежутке $[0;\ 2\pi]$.

Поскольку, как было показано в п. 3.1, функция косинус периодическая с наименьшим положительным периодом, равным 2π, то ее значения повторяются через 2π. Нами получено изображение графика на отрезке, длина которого равна периоду 2π. Сдвигая эту линию вдоль оси Ox вправо и влево на 2π, получаем изображение графика функции $y = \cos x$ (рис. 113).

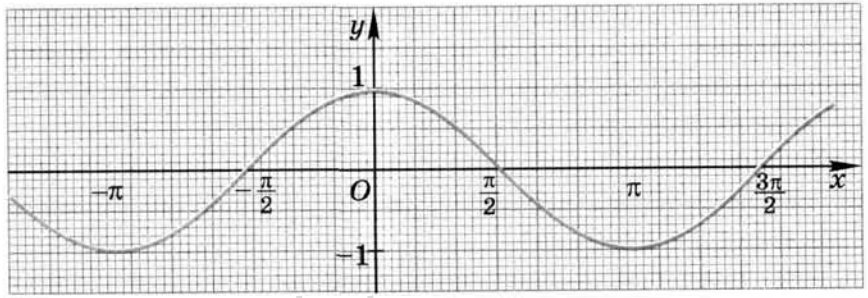


Рис. 113

График функции $y = \cos x$ называется *косинусоидой*.

Изображение косинусоиды дает наглядное представление обо всех свойствах функции косинус.

Теорема (*о свойствах функции* $y = \cos x$).

1. Область определения функции $y = \cos x$ — множество R.

2. Область (множество) значений функции $y = \cos x$ — промежуток $[-1; 1]$.

3. Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π.

4. Наименьшее значение $y = -1$ функция $y = \cos x$ принимает в точках $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$. Наибольшее значение $y = 1$ функция $y = \cos x$ принимает в точках $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

5. Нулями функции $y = \cos x$ являются значения аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

6. Функция $y = \cos x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$, и положительные значения на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

7. Функция $y = \cos x$ четная.

8. Функция $y = \cos x$ убывает на каждом из промежутков $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in Z$, и возрастает на каждом из промежутков $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$.

Доказательство. Свойства 1 и 3 были установлены в п. 3.1.

Свойства 2, 4—7 легко прочитать на изображении графика функции $y = \cos x$. Заметим, что они фактически были обоснованы в п. 2.4 и 2.5. Свойство 8 тоже можно прочитать на графике. Промежутки возрастания и убывания можно также указать, используя единичную окружность.

▲ Докажите свойство 8 самостоятельно (см. п. 3.3).

Можно использовать при изображении графика $y = \cos x$ не только свойство периодичности, но и свойство четности косинуса (поясните как).

Еще один способ построения графика функции $y = \cos x$ будет рассмотрен в следующем пункте.

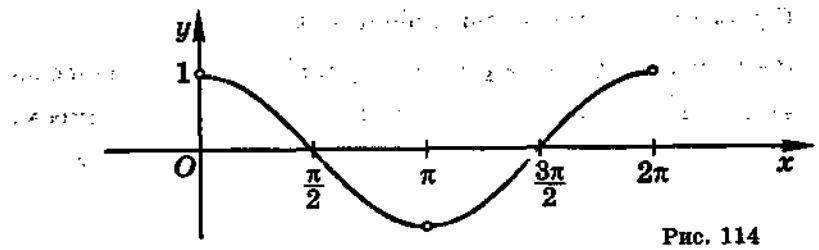


Рис. 114

Пример 1. Функция задана формулой $f(x) = \cos x$ на множестве D. Является ли эта функция четной, если:

а) $D = (-2\pi; 2\pi]$; б) $D = Z$?

Решение. а) Функция не является четной, так как промежуток D — ее область определения — несимметричен относительно начала координат: $2\pi \in D$, $-2\pi \notin D$.

б) Функция четная, так как ее область определения $D = Z$ — множество, симметричное относительно нуля, и для любого $x \in Z$ имеем

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x).$$

Пример 2. Изобразить график функции f, заданной формулой $y = \cos x$ на множестве $D = (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$, и назвать по графику свойства этой функции.

Решение. График данной функции изображен на рисунке 114 (поясните, как он получен).

Свойства этой функции следующие:

1) $D(f) = (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.

2) $E(f) = (-1; 1)$ (поясните почему).

3) Функция f непериодическая (поясните почему).

4) Функция f не имеет ни наименьшего, ни наибольшего значений (поясните почему).

5) Нулями функции f являются $x_1 = \frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{3\pi}{2}$.

6) Функция f принимает отрицательные значения на промежутках $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ и $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Функция f принимает положительные значения на промежутках $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

7) Функция f не является четной (поясните почему).

8) Функция f убывает на промежутке $(0; \pi)$ и возрастает на промежутке $(\pi; 2\pi)$. ▲

Адукацыйны партал www.adu.by

Пример 3. Решить уравнение $\cos\left(\frac{x}{9}-1\right)=-1$.

Решение. Функция $y=\cos u$ принимает наименьшее значение $y=-1$ в точках $u=\pi+2\pi n$, $n\in Z$; при $u=\frac{x}{3}-1$ имеем:

$\frac{x}{3}-1=\pi+2\pi n$, $n\in Z$, откуда $x=3+3\pi+6\pi n$, $n\in Z$.

Ответ: $3(1+\pi+2\pi n)$, $n\in Z$.

Пример 4*. Решить неравенство:

а) $\cos\left(\frac{x}{2}-3\right)<0$; б) $\cos 3x<2$.

Решение. а) Функция $y=\cos u$ принимает отрицательные значения при $\frac{\pi}{2}+2\pi n<u<\frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$ (эти промежутки легко прочесть на схематическом графике функции или на единичной окружности). Когда $u=\frac{x}{2}-3$, имеем:

$$\frac{\pi}{2}+2\pi n<\frac{x}{2}-3<\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z,$$

$$\pi+6+4\pi n<x<3\pi+6+4\pi n,\ n\in Z.$$

б) Неравенство $\cos 3x<2$ верно при любых значениях x (поясните почему).

Ответ: а) $(\pi+6+4\pi n;\ 3\pi+6+4\pi n)$, $n\in Z$;

б) x — любое число.

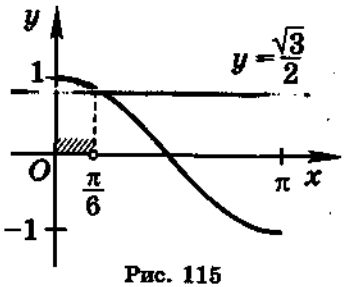


Рис. 115

▲**Пример 5*.** Решить неравенство $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$ на промежутке $[0;\ \pi]$.

Решение. На промежутке $[0;\ \pi]$ функция $y=\cos x$ убывает и по условию: $\cos x>\frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е. $\cos x>\cos\frac{\pi}{6}$. Значит, $0\leqslant x<\frac{\pi}{6}$ (рис. 115).

Ответ: $\left[0;\ \frac{\pi}{6}\right)$. ▲

1. Назовите основные свойства функции $y=\cos x$.
2. Изобразите график функции $y=\cos x$. Как называется этот график?
3. Как на изображении графика функции $y=\cos x$ отражаются свойства:
   а) периодичность функции; б) четность функции?
4. Используя график функции $y=\cos x$, укажите для нее:
   а) наименьшее (наибольшее) значение;
   б) промежутки знакопостоянства и нули;
   в) промежутки убывания (возрастания).
5. Чему равен наименьший положительный период функции $y=\cos x$?
6*. Докажите, что функция $y=\cos x$ возрастает на каждом из промежутков вида $[\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n]$, $n\in Z$.
7*. Докажите, что функция $y=\cos x$ убывает на каждом из промежутков вида $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$, $n\in Z$.

Упражнения

3.38°. Укажите область (множество) значений функции f:

1) $f(x)=\cos x+2$; 2) $f(x)=\cos x-1$;

3) $f(x)=1-4\cos(3\pi+x)$; 4) $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4{,}5$;

5) $f(x)=|\cos x|$; 6) $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

3.39. Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции:

1) $f(x)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$; 2) $f(x)=\cos(10\pi-x)$;

3) $f(x)=\cos x-4{,}7$; 4) $f(x)=\cos x+1{,}2$.

3.40. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\cos\frac{\pi}{18}$; $\cos\frac{6\pi}{36}$; $\cos\frac{2\pi}{9}$; $\cos\frac{\pi}{36}$;

2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$; $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$; $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$; $\cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$;

3) $\cos(-0{,}4)$; $\cos(-1{,}5)$; $\cos(-0{,}8)$; $\cos 4{,}9$;

4) $\cos 0{,}6$; $\cos 1{,}4$; $\cos(-1{,}7)$; $\cos 0{,}2$.

3.41. Сравните:

1) $\cos\frac{5\pi}{7}$ и $\cos\frac{7\pi}{9}$; 2) $\cos\frac{3\pi}{14}$ и $\cos\frac{2\pi}{5}$;

3) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$ и $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 4) $\cos\left(-\frac{9\pi}{7}\right)$ и $\cos\left(-\frac{6\pi}{5}\right)$;

5) $\cos(-1{,}7)$ и $\cos(-3{,}14)$; 6) $\cos(-1{,}57)$ и $\cos(-6)$;

7) $\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)$ и $\cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right)$; 8) $\cos\left(-\frac{11\pi}{16}\right)$ и $\sin\left(-\frac{15\pi}{14}\right)$;

9) $\sin(-18{,}1)$ и $\cos(-6{,}28)$; 10) $\cos(-4{,}58)$ и $\sin(-8)$.

Адукацыйны партал www.adu.by

3.42°. Установите, четной или нечетной является функция f:

1) $f(x)=x^3\cos x$; 2) $f(x)=\cos x\sin x$;

3) $f(x)=\frac{\cos 8x}{\sin x^3}$; 4) $f(x)=\frac{x^4+1}{x\cos x}$;

5) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$; 6) $f(x)=\frac{\cos x^3}{4x^2-25}$;

7) $f(x)=x\sin x\cos x$; 8) $f(x)=2|\sin x|\cos x$.

3.43. Используя график функции $y=\cos x$ (см. рис. 113), сравните с нулем значение выражения:

1) $\cos\frac{6\pi}{5}$; 2) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 3) $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$;

4) $\cos\left(-\frac{9\pi}{8}\right)$; 5) $\cos 2$; 6) $\cos 5{,}2$;

7) $\cos(-4)$; 8) $\cos(-2{,}1)$.

3.44°. Функция f задана формулой $y=\cos x$ на множестве D. Укажите для функции f: а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки знакопостоянства, где $y<0$; е) промежутки знакопостоянства, где $y>0$; ж) нули, если:

1) $D=[-2\pi;\ \pi]$; 2) $D=[0;\ 3\pi]$; 3) $D=\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right]$;

4) $D=\left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right]$; 5) $D=\left[-\frac{3\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right]$; 6) $D=\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{6}\right]$;

7) $D=[0;\ 1]$; 8) $D=[-1;\ 0]$.

3.45. Используя изображение графика функции $y=\cos x$ (см. рис. 113), найдите приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\cos 2$; 2) $\cos(-1)$; 3) $\cos 1$;

4) $\cos 4$; 5) $\cos(-3{,}5)$; 6) $\cos 5{,}5$.

3.46. Решите уравнение:

1) $\cos 4x=0$; 2) $\cos\frac{x}{5}=0$;

3) $\cos(3x-1)=1$; 4) $\cos\left(\frac{x}{6}+3\right)=1$;

5) $\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{\pi}{10}\right)=-1$; 6) $\cos\left(\frac{4x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=-1$;

7) $\cos^2\left(\frac{x}{6}-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$; 8) $\left|\sin\left(\frac{5\pi}{2}-6x\right)\right|-1=0$.

3.47. Решите неравенство:

1) $\cos\frac{5x}{4}\geqslant 0$; 2) $\cos\frac{x}{6}>0$;

3) $\cos(3x+1)>-1$; 4) $\cos(4x-3)\leqslant -1$;

5) $\cos(2\pi-2x)<1$; 6) $\cos(5x-\pi)\geqslant 1$.

3.48. Укажите, в каких точках промежутка $[-2\pi;\ 2\pi]$ определена функция, и изобразите ее график:

1) $y=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$; 2) $y=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

3) $y=\operatorname{ctg}x\sin x$; 4) $y=1:\frac{1}{\cos x}$;

5) $y=\left(\sqrt{\cos x}\right)^2$; 6) $y=\left(\sqrt{\cos x-1}\right)^2+1$.

3.49. При каких значениях n существуют такие значения x, при которых будет верным равенство:

1) $5\cos x=n+1$; 2) $4\cos x=2-n$;

3) $\cos^2 x=n$; 4) $1-\cos^2 x=n$?

3.50. Решите уравнение $\cos x=a$ для всех x из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, если a равно:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $-0{,}23$;

6) $-\frac{7}{9}$; 7) -1; 8) 1; 9) $\frac{\pi}{3}$; 10) $-\sqrt{2}$.

3.51. При каких значениях x из промежутка D функция $y=\cos x$ принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения, если:

1) $D=\left[-4\frac{2}{9}\pi;\ -1\frac{5}{8}\pi\right]$; 2) $D=\left[5\frac{3}{7}\pi;\ 7\frac{9}{11}\pi\right]$;

3) $D=(-1{,}2\pi;\ 2{,}9\pi]$; 4) $D=[-2{,}3\pi;\ 1{,}4\pi)$?

3.52*. Решите на промежутке $[0;\ \pi]$ неравенство: а) $\cos x<a$; б) $\cos x>a$; в) $\cos x\leqslant a$; г) $\cos x\geqslant a$, если a равно:

1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-\frac{3}{7}$;

6) $-0{,}58$; 7) 1; 8) -1; 9) $-\sqrt{3}$; 10) $\sqrt{\pi}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

3.53*. Найдите на промежутке $[0; 2\pi]$ решения уравнения:

1) $\cos x = 0{,}4$; 2) $\cos x = 0{,}2$;
3) $\cos x = -0{,}1$; 4) $\cos x = -0{,}9$.

3.54*. Найдите на промежутке $[0; 2\pi]$ решения неравенства:

1) $\cos x > 0{,}2$; 2) $\cos x < 0{,}3$;
3) $\cos x \leqslant -0{,}6$; 4) $\cos x \geqslant -0{,}8$.

▲3.5. Преобразование графиков функций

В 9-м классе мы научились из графика функции $y = f(x)$ различными преобразованиями получать графики функций: $y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(x) + t$, $y = f(x - s)$, $y = f(x - s) + t$, $y = kf(x)$ $(k > 0)$, $y = f\left(\frac{x}{m}\right)$ $(m > 0)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = \left|f(|x|)\right|$.

Напомним эти преобразования и проиллюстрируем их на примере функции $y = \sin x$.

1. График функции $y = -f(x)$

Напомним: чтобы изобразить график функции $y = -f(x)$, можно отобразить график функции $y = f(x)$ ***симметрично относительно оси Ox.***

Пример 1. Изобразить график функции

$$y = -\sin x.$$

Решение изображено на рисунке 116, поясните его.

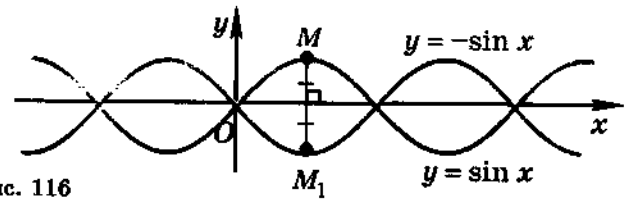


Рис. 116

2. График функции $y = f(-x)$

Напомним: чтобы изобразить график функции $y = f(-x)$, можно отобразить график функции $y = f(x)$ ***симметрично относительно оси Oy.***

Пример 2. Изобразить график функции

$$y = \sin(-x).$$

Адукацыйны партал www.adu.by

Решение изображено на рисунке 117, поясните его.

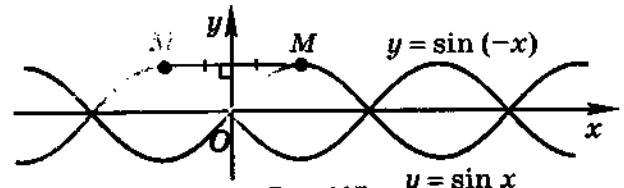


Рис. 117

Обратите внимание, что $y = \sin(-x)$ и $y = -\sin x$ — это одна и та же функция, поскольку $\sin(-x) = -\sin x$, поэтому получены одинаковые графики (см. рис. 116, 117), хотя использованы разные преобразования.

3. График функции $y = f(x) + t$

Напомним, что график функции $y = f(x) + t$ можно получить ***сдвигом*** графика функции $y = f(x)$ ***вдоль оси Oy на*** $|t|$ ***единиц*** (вверх при $t > 0$; вниз при $t < 0$).

Пример 3. Изобразить график функции

$$y = \sin x - 2.$$

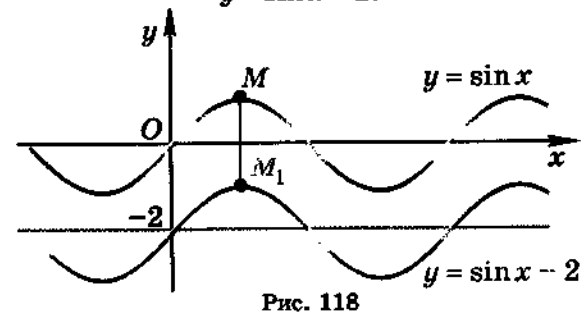


Рис. 118

Решение изображено на рисунке 118, поясните его.

4. График функции $y = f(x - s)$

Напомним, что график функции $y = f(x - s)$ можно получить ***сдвигом*** графика функции $y = f(x)$ ***вдоль оси Ox на*** $|s|$ ***единиц*** (вправо при $s > 0$; влево при $s < 0$).

Пример 4. Изобразить график функции

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

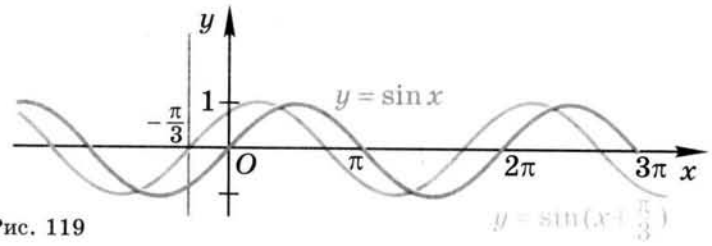


Рис. 119

Решение. Представим уравнение $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ в виде $y=\sin\left(x-\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Изобразим синей линией график функции $y=\sin x$, сдвинем эту синусоиду вдоль оси Ox влево на $\frac{\pi}{3}$, получим изображение графика функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ (рис. 119, красная линия).

Замечание. Так как $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$, то график функции $y=\cos x$ — косинусоида (на рисунке 120 она показана красным цветом) — совпадает с графиком функции $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

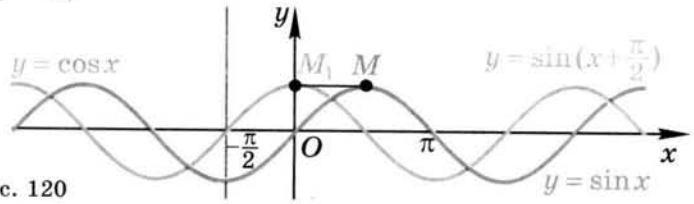


Рис. 120

5. График функции $y=f(x-s)+t$

Рассмотрим функцию $y=f(x-s)+t$. Ее график можно получить из графика функции $y=f(x)$ следующим образом: ***сдвигом вдоль оси Ox на $|s|$ единиц*** (вправо, когда $s>0$; влево, когда $s<0$) и ***сдвигом вдоль оси Oy на $|t|$ единиц*** (вверх при $t>0$; вниз при $t<0$).

Пример 5. Изобразить график функции

$$y=\sin(x-1)+2.$$

Решение изображено на рисунке 121, поясните его.

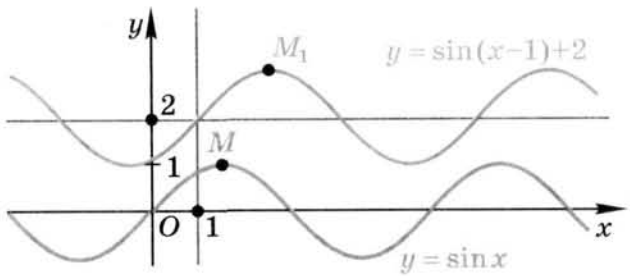


Рис. 121

6. График функции $y=kf(x)$ $(k>0)$

Напомним: чтобы получить точки графика $y=kf(x)$, можно умножить ординату каждой точки графика функции $y=f(x)$ на число k, т. е. выполнить растяжение (или сжатие) линии вдоль оси Oy.

Если $k>1$, то говорят о ***растяжении вдоль оси Oy в k раз***. Если $0<k<1$, то говорят о ***сжатии вдоль оси Oy в $\frac{1}{k}$ раз***.

Пример 6. Изобразить график функции:

а) $y=2\sin x$; б) $y=\frac{1}{2}\sin x$.

Решение а) изображено на рисунке 122. Умножив ординату каждой точки синусоиды $y=\sin x$ на 2 (абсцисса остается без изменений), получили изображение графика функции $y=2\sin x$.

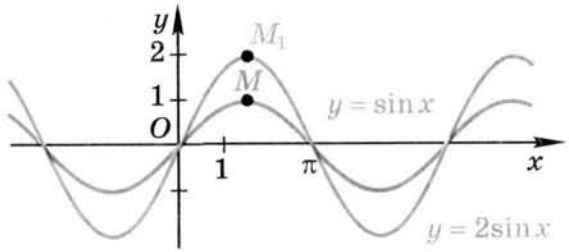


Рис. 122

Здесь применили растяжение графика функции $y=\sin x$ вдоль оси Oy в 2 раза.

Решение б) показано на рисунке 123. Умножив ординату каждой точки синусоиды $y=\sin x$ на $\frac{1}{2}$ (абсцисса остается без изменений), получили изображение графика функции $y=\frac{1}{2}\sin x$.

Адукацыйны партал www.adu.by

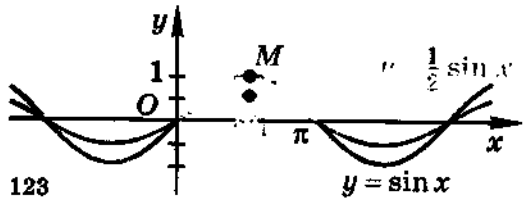


Рис. 123

Здесь применили сжатие графика функции $y = \sin x$ вдоль оси Oy в 2 раза.

7. График функции $y = f\left(\frac{x}{m}\right)$, *где* $m > 0$

Напомним: если умножить абсциссы всех точек графика функции $y = f(x)$ на число m (это значит выполнить растяжение (или сжатие) вдоль оси Ox), то получатся точки графика $y = f\left(\frac{x}{m}\right)$. Если $m > 1$, то говорят о ***растяжении вдоль оси Ox в m раз***. Если же $0 < m < 1$, то говорят о ***сжатии вдоль оси Ox в*** $\frac{1}{m}$ ***раз***.

Пример 7. Изобразить график функции:

а) $y = \sin\frac{x}{2}$; б) $y = \sin 2x$.

Решение. а) Имеем $f(x) = \sin x$, а $f\left(\frac{x}{m}\right) = \sin\frac{x}{2}$, значит, $m = 2$.

Умножив абсциссу каждой точки синусоиды $y = \sin x$ на 2 (ордината остается без изменений), получили изображение графика функции $y = \sin\frac{x}{2}$ (рис. 124, красная линия).

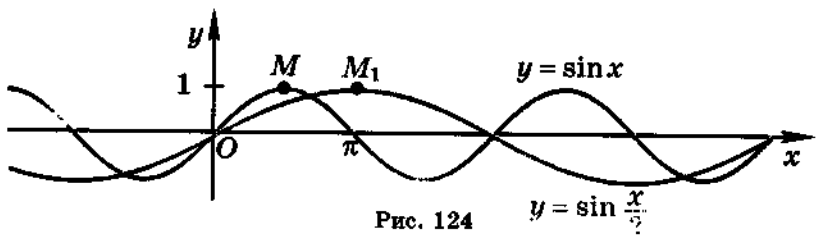


Рис. 124

Здесь применили растяжение графика функции $y = \sin x$ вдоль оси Ox в 2 раза.

б) Имеем $f(x) = \sin x$, а $f\left(\frac{x}{m}\right) = \sin 2x$, т. е. $y = \sin\frac{x}{\frac{1}{2}}$, значит, $m = \frac{1}{2}$.

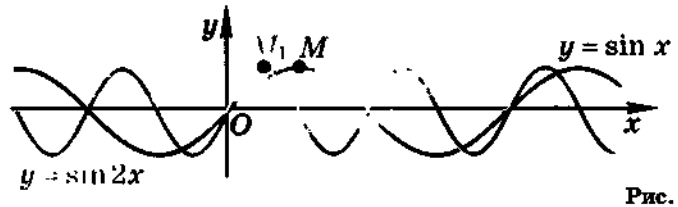


Рис. 125

Умножив абсциссу каждой точки синусоиды $y = \sin x$ на $\frac{1}{2}$ (ордината остается без изменений), получили изображение графика функции $y = \sin 2x$ (рис. 125, красная линия).

Здесь применили сжатие графика функции $y = \sin x$ вдоль оси Ox в 2 раза.

8. График функции $y = af(mx + b) + c$, $m > 0$

Запишем эту функцию в виде $y = af\left(m\left(x + \frac{b}{m}\right)\right) + c$.

При такой записи ясно, что график этой функции получается из графика функции $y = f(x)$ в результате последовательности преобразований, уже изученных нами: растяжением (или сжатием) вдоль оси абсцисс с коэффициентом $k_{Ox} = \frac{1}{m}$; растяжением (или сжатием) вдоль оси ординат с коэффициентом $k_{Oy} = a$; сдвигом вдоль оси абсцисс вправо (или влево) на c.

Изменение какой-либо величины по закону $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ называют синусоидальным колебанием, поскольку график функции $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ является, вообще говоря, синусоидой, как и график функции $y = \sin x$, из которого он получен при выполнении различных преобразований (поясните каких). Число A называется амплитудой (или размахом), ω — круговой частотой, φ — начальной фазой колебания.

Примерами синусоидальных колебаний, которые описываются этой формулой, являются: колебания маятника, колебания напряжения в электрической сети, изменения тока и напряжения в колебательном контуре, колебания воздуха (звук) и др.

В физике о величинах, которые изменяются по закону $f(t) = A\sin(\omega t + y)$, говорят, что они совершают гармонические колебания.

дукацыйны партал www.adu.by

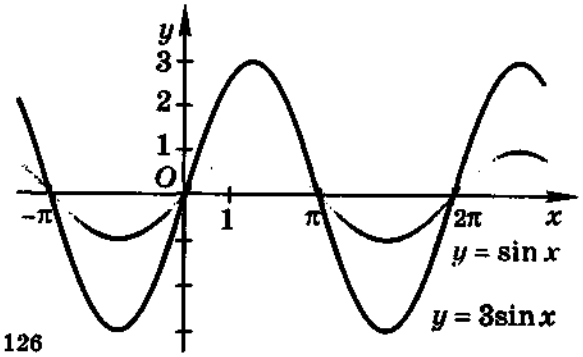


Рис. 126

Пример 8. Изобразить график функции:

а) $y = 3\sin(2x - 8)$; б) $y = 3\sin(2x - 8) + 1$.

Решение. а) Запишем функцию в виде

$$y = 3\sin 2(x - 4).$$

Чтобы получить график данной функции из графика функции $y = \sin x$ (на рисунке 126 он синего цвета), нужно последовательно выполнить с ним следующие преобразования:

1) растяжение вдоль оси Oy с коэффициентом $k_{Oy} = 3$; получается график функции $y = 3\sin x$ (на рисунке 126 он черного цвета);

2) сжатие вдоль оси Ox с коэффициентом $k_{Ox} = \frac{1}{2}$; получается график функции $y = 3\sin 2x$ (на рисунке 127 он голубого цвета);

3) сдвиг вдоль оси Ox вправо на 4 единицы; получается график функции $y = 3\sin 2(x - 4)$ (на рисунке 128 он красного цвета).

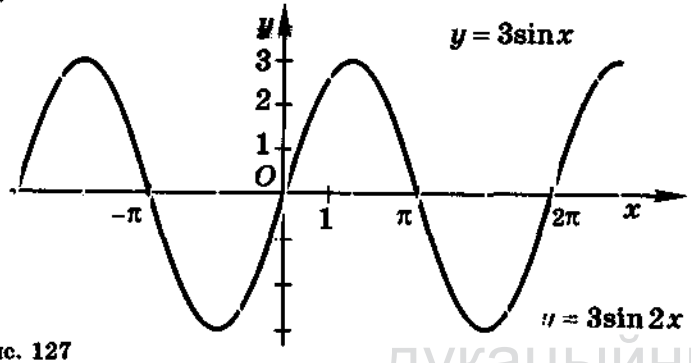


Рис. 127

дукацыйны партал www.adu.by

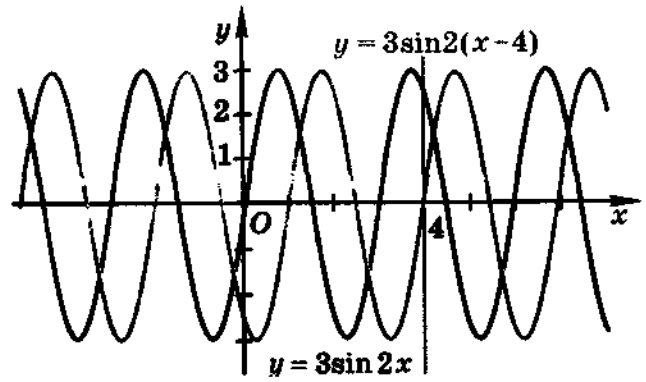


Рис. 128

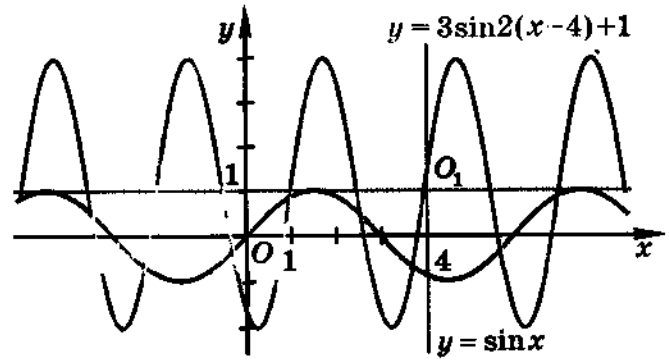


Рис. 129

б) График этой функции получится, если график функции $y = \sin x$ (на рисунке 129 он синего цвета) подвергнуть преобразованиям 1)—3) из задания а) и еще выполнить сдвиг вдоль оси Oy на 1 единицу вверх (на рисунке 129 он красного цвета).

9. График функции $y = |f(x)|$

Напомним: чтобы изобразить график функции $y = |f(x)|$, можно части графика функции $y = f(x)$, лежащие выше оси абсцисс или на ней, оставить без изменения, а части, лежащие ниже оси абсцисс, отобразить симметрично относительно этой оси.

Пример 9. Изобразить график функции

$$y = |\sin x|.$$

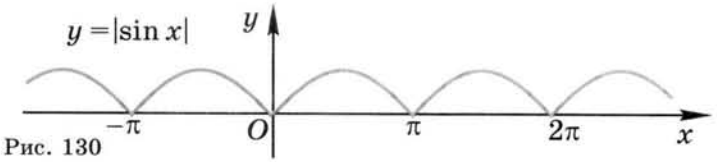


Рис. 130

Решение изображено на рисунке 130 (поясните, как оно получено).

10. График функции $y = f(|x|)$

Напомним: чтобы изобразить график функции $y = f(|x|)$, можно часть графика функции $y = f(x)$ с неотрицательными абсциссами оставить без изменения, а часть графика функции $y = f(|x|)$ с отрицательными абсциссами получить из первой части симметричным отображением относительно оси Oy.

Заметим, что часть графика функции $y = f(x)$ с отрицательными абсциссами при изображении графика функции $y = f(|x|)$ не используется.

Пример 10. Изобразить график функции

$$y = \sin|x|.$$

Решение изображено на рисунке 131 (поясните, как оно получено).

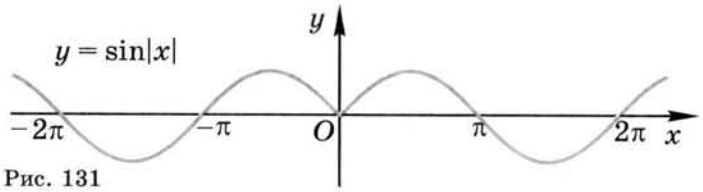


Рис. 131

11. График функции $y = |f(|x|)|$

Для получения графика функции вида $y = |f(|x|)|$ можно, например, последовательно изобразить:

1) график функции $y = f(x)$;

2) график функции $y = f(|x|)$ (можно вторым изображать и график функции $y = |f(x)|$);

3) график функции $y = |f(|x|)|$.

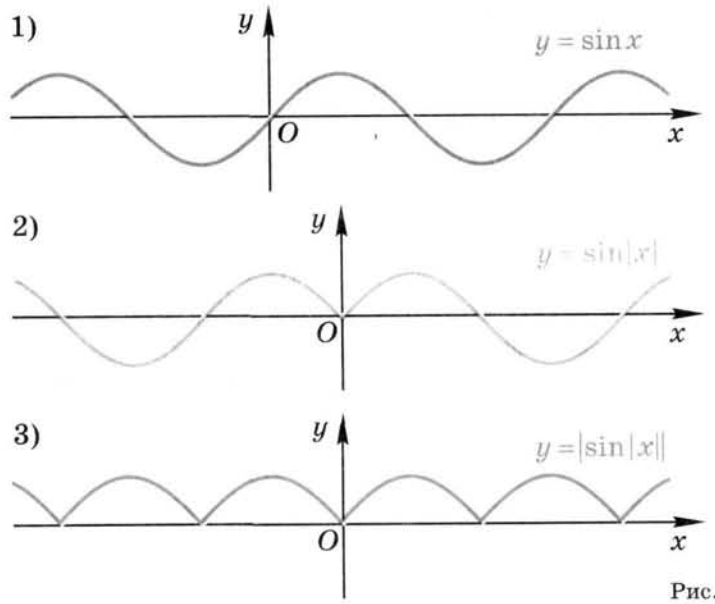


Рис. 132

Пример 11. Изобразить график функции $y = |\sin|x||$.

Решение. а) Последовательно изобразив графики функций $y = \sin x$ (рис. 132, *1*), $y = \sin|x|$ (рис. 132, *2*), окончательно получаем график функции $y = |\sin|x||$ (рис. 132, *3*).

Можно было после изображения графика функции $y = \sin x$ получить сначала изображение графика функции $y = |\sin x|$. Это изображение совпадает с изображением графика функции $y = |\sin|x||$ (рис. 133, *1*, *2*, *3*).

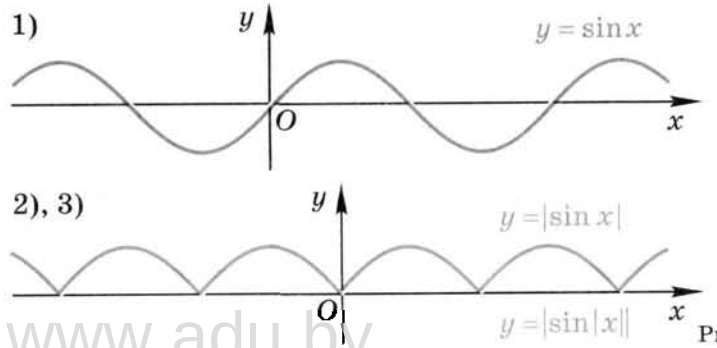


Рис. 133

Адукацыйны партал www.adu.by

?

1. Как преобразовать график функции $y = f(x)$ в график функции:

   а) $y = -f(x)$; б) $y = f(-x)$; в) $y = -f(-x)$?

   В какую точку отобразится точка $M(s; t)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$?

2. Как преобразовать график функции $y = f(x)$ в график функции:

   а) $y = f(x) - 3$; б) $y = f(x + 4)$; в) $y = f(x - 2) + 5$?

   В какую точку отобразится точка $M(s; t)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$?

3. Как преобразовать график функции $y = f(x)$ в график функции:

   а) $y = 3f(x)$; б) $y = f\left(\frac{x}{4}\right)$;

   в) $y = \frac{1}{2}f(5x)$; г) $y = 4f(2x - 6)$;

   д) $y = 5f(2x + 4) - 3$?

   В какую точку отобразится точка $M(s; t)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$?

4. Как преобразовать график функции $y = f(x)$ в график функции:

   а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$; в) $y = |f(|x|)|$?

   В какую точку отобразится точка $M(s; t)$, принадлежащая графику функции $y = f(x)$?

Упражнения

Изобразите график функции (3.55—3.61). (График периодической функции с наименьшим положительным периодом T достаточно изобразить на отрезке, длина которого равна T.)

3.55. 1) $y = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$; 2) $y = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;

3) $y = \sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x$;

4) $y = \sin x \sin 2x + \cos x \cos 2x$;

5) $y = \sin x - 1$; 6) $y = \sin x + 3$;

7) $y = \cos x + 2$; 8) $y = \cos x - 1$;

9) $y = -\cos(-x) - 2$; 10) $y = -\cos(-x) + 3$.

3.56. 1) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; 2) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;

3) $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 4) $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

5) $y = \cos(x + 2) - 3$; 6) $y = -\sin(x - 3) - 2$;

7) $y = -\sin(x + 3) - 2{,}5$; 8) $y = -\cos(x + 1{,}5) - 0{,}5$.

3.57. 1) $y = 5\sin(x - 1)$; 2) $y = 3\cos(x + 2)$;

3) $y = \frac{1}{2}\cos(x + 3) + 2$; 4) $y = \frac{3}{2}\sin(x - 1) - 2$;

5) $y = \cos^2 1{,}5x - \sin^2 1{,}5x$; 6) $y = 2\sin 2x \cos 2x$;

7) $y = 2\cos^2 2x - 1$; 8) $y = 1 - 2\sin^2 x$.

3.58. 1) $y = 2\sin(0{,}5x + 1) - 1$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin(2x - 4) + 3$;

3) $y = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$; 4) $y = \frac{1}{3}\cos\left(1{,}5x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$;

5) $y = \frac{1}{2}\sin(0{,}5x + 1) - 4$; 6) $y = 5\cos(4x - 4) - 1{,}5$.

3.59*. 1) $y = |\sin x - 0{,}5|$; 2) $y = |\cos x + 0{,}5|$;

3) $y = \left|2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right|$; 4) $y = \left|\frac{3}{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$;

5) $y = \cos(|x| - 2)$; 6) $y = \sin(|x| + 2)$;

7) $y = 3\sin(|x| + 1)$; 8) $y = 4\cos(|x| - 1)$;

9) $y = |3\sin(|x| + 1) - 2|$; 10) $y = |4\cos(|x| - 1) + 2|$.

3.60*. 1) $y = |\sin(x - 2)|$; 2) $y = |\cos(x + 2)|$;

3) $y = |\cos|x| - 1|$; 4) $y = |\sin|x| - 3|$;

5) $y = |\sin|x| - 2| + 1$; 6) $y = |\cos|x| - 2| + 2$.

3.61*. 1) $y = \frac{\sin 2x}{\sin x}$; 2) $y = \frac{\sin 2x}{\cos x}$;

3) $y = \sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x$; 4) $y = \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x$.

дукацыйны партал www.adu.by

3.6. Функция $y = \operatorname{tg} x$

Рассмотрим ***функцию тангенс***, заданную формулой $y = \operatorname{tg} x$, с областью определения — множеством действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

Изобразим график функции $y = \operatorname{tg} x$. Сделаем это на промежутке длиной, равной периоду тангенса.

Для этого заполним таблицу значений функции тангенс для значений аргумента на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, взятых через $\frac{\pi}{8}$ с точностью до 0,1. Приближенные значения тангенса можно найти, используя тригонометрическую окружность и линию тангенсов (рис. 134).

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{tg} x$	—	–2,4	–1	–0,4	0	0,4	1	2,4	—

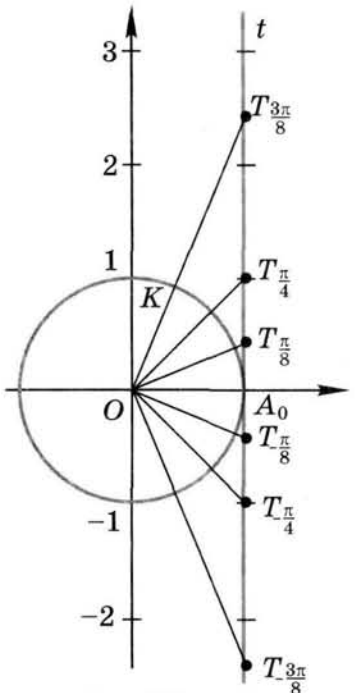


Рис. 134

Отметив эти точки на координатной плоскости Oxy (рис. 135) и соединив их плавной линией, получим изображение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Через точки $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ проведем вертикальные прямые $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ (они не имеют общих точек с графиком функции тангенс, так как эта функция в точках $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$ не определена) (рис. 136). Нами получено изображение графика на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, длина которого равна π — периоду тангенса. Сдвинув эту линию вдоль оси Ox вправо и влево на π, получим изображение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 137).

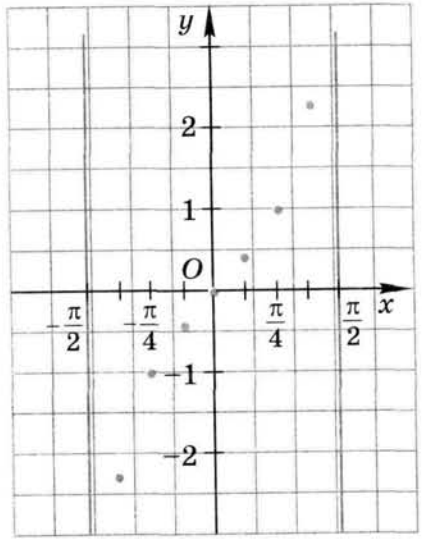


Рис. 135

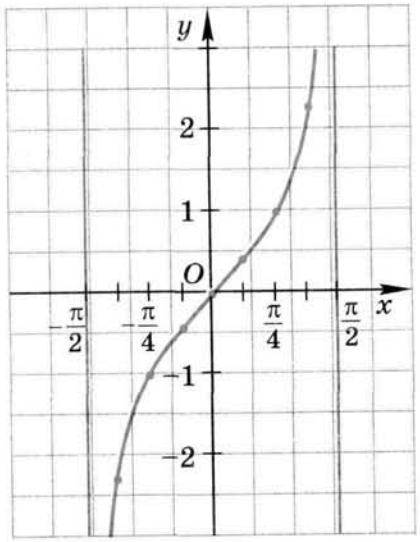


Рис. 136

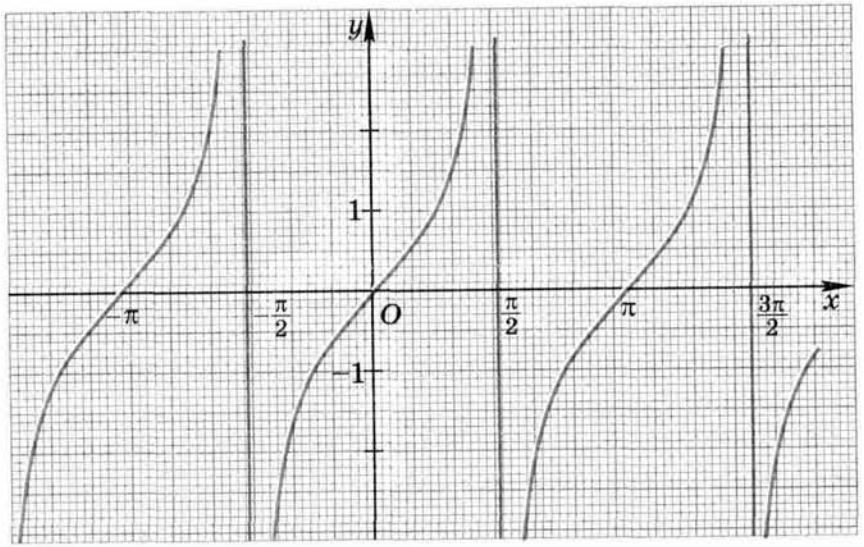


Рис. 137

График функции $y = \operatorname{tg} x$ называется ***тангенсоидой***.

Линию на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, называют ***ветвью тангенсоиды***. Тангенсоида состоит из бесконечного множества одинаковых ветвей.

Адукацыйны партал www.adu.by

Изображение графика функции тангенс (см. рис. 137) подсказывает свойства этой функции.

Теорема (*о свойствах функции* $y = \operatorname{tg} x$).

1. Область определения функции $y = \operatorname{tg} x$ — множество действительных чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

2. Область (множество) значений функции $y = \operatorname{tg} x$ — все действительные числа, т. е. множество R.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с периодом π.

4. Наибольшего и наименьшего значений функция $y = \operatorname{tg} x$ не имеет.

5. Нулями функции $y = \operatorname{tg} x$ являются значения аргумента $x = \pi n$, $n \in Z$.

6. Функция $y = \operatorname{tg} x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \pi n\right)$, $n \in Z$, и положительные значения на каждом из промежутков $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

7. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечетная.

8. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$.

Доказательство. Свойства 1 и 3 были установлены в п. 3.1.

Свойства 2, 4—7 можно прочитать на изображении графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 137). Они фактически были обоснованы в п. 2.7. Свойство 8 тоже можно увидеть на изображении графика.

▲ Приведем доказательство свойства 8. Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Пусть $x_1,\ x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $x_1 < x_2$. Тогда:

$$\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} =$$

$$= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_2 \cos x_1} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_2 \cos x_1} > 0$$

(поясните последнее неравенство).

Значит, $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$, т. е. функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Возрастание этой функции на каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n;\ \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$, следует из ее периодичности. ☒ ▲

Замечание. *Функция* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *имеет только промежутки возрастания, но она не является возрастающей в области определения* $D(f)$. (Объясните почему.)

▲ Изображение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ можно получить несколько иначе, чем было показано, учитывая нечетность функции тангенс. ▲

Пример 1. Решить неравенство:

а) $\operatorname{tg}(5x - 2) < 0$; б) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} + 3\right) \geqslant 0$.

Решение. а) Отрицательные значения функция $y = \operatorname{tg} u$ принимает при $-\frac{\pi}{2} + \pi k < u < \pi k$, $k \in Z$ (эти промежутки легко прочесть по схематическому графику функции тангенс (см. рис. 137)). Для $u = 5x - 2$ получаем:

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < 5x - 2 < \pi k,\ k \in Z;$$

$$\frac{2}{5} - \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5} < x < \frac{2}{5} + \frac{\pi k}{5},\ k \in Z.$$

б) Имеем: $\pi k \leqslant \frac{x}{4} + 3 < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$ (поясните, почему справа знак строгого неравенства). Отсюда получим:

$$-12 + 4\pi k \leqslant x < -12 + 2\pi + 4\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: а) $\left(\frac{2}{5} - \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5};\ \frac{2}{5} + \frac{\pi k}{5}\right)$, $k \in Z$;

б) $[-12 + 4\pi k;\ -12 + 2\pi + 4\pi k)$, $k \in Z$.

▲ **Пример 2.** Решить неравенство

$$\operatorname{tg} x \leqslant 1$$

на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Адукацыйны партал www.add.by

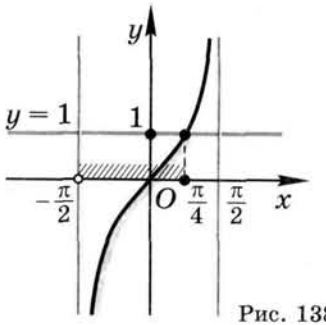


Рис. 138

Решение. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и по условию $\operatorname{tg} x \leqslant 1$, т. е. $\operatorname{tg} x \leqslant \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, значит, $x \leqslant \frac{\pi}{4}$, но $x > -\frac{\pi}{2}$. Итак, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant \frac{\pi}{4}$ (рис. 138).

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$. ▲

1. Назовите основные свойства функции $y = \operatorname{tg} x$.
2. Изобразите график функции $y = \operatorname{tg} x$. Как называется график этой функции?
3. Можно ли функцию тангенс назвать возрастающей на всей области определения? Почему?
4. Как на графике функции $y = \operatorname{tg} x$ отражены свойства: а) нечетности; б) периодичности?
5. Чему равен наименьший положительный период функции $y = \operatorname{tg} x$?

6*. Докажите, что функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастающая на каждом из промежутков вида $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Упражнения

3.62°. Укажите область определения и множество значений функции f:

1) $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$;
2) $f(x) = 4\operatorname{tg} x - 3$;
3) $f(x) = (\operatorname{tg} x - 4)^2$;
4) $f(x) = (\operatorname{tg} x + 2)^4$;
5) $f(x) = |\operatorname{tg} x|$;
6) $f(x) = \sqrt{16\operatorname{tg}^2 x}$;
7) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$;
8) $f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

3.63. Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции:

1) $f(x) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;
2) $f(x) = \frac{2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2} - 1}$;
3) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg}(-3x)}{1 + \operatorname{tg} 4x \operatorname{tg}(-3x)}$;
4) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg}(-4x)}{1 - \operatorname{tg} 5x \operatorname{tg}(-4x)}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

3.64. Расположите в порядке убывания числа:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}$; $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{36}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$;
2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{16}\right)$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;
3) $\operatorname{tg}(-5)$; $\operatorname{tg}(-3)$; $\operatorname{tg} 3$; $\operatorname{tg}(-1)$;
4) $\operatorname{tg} 6{,}4$; $\operatorname{tg} 4{,}1$; $\operatorname{tg} 2{,}2$; $\operatorname{tg} 3{,}6$.

3.65. Сравните:

1) $\operatorname{tg}(-2{,}6\pi)$ и $\operatorname{tg}(-2{,}61\pi)$;
2) $\operatorname{tg}(-4{,}75\pi)$ и $\operatorname{tg}(-5{,}6\pi)$;
3) $\operatorname{tg} 2$ и $\operatorname{tg} 3$;
4) $\operatorname{tg} 4$ и $\operatorname{tg} 6$;
5) $\operatorname{tg}(-3{,}14)$ и $\operatorname{tg}(-3{,}2)$;
6) $\operatorname{tg}(-4{,}78)$ и $\operatorname{tg}(-7)$.

3.66°. Четной или нечетной является функция f, если:

1) $f(x) = x\operatorname{tg}^2 x$;
2) $f(x) = x^7 \operatorname{tg} x$;
3) $f(x) = 2\sin x^5 + \operatorname{tg}^3 x$;
4) $f(x) = \operatorname{tg} x^3 - \sin x^{11}$;
5) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x^3}$;
6) $f(x) = (2\sin x)^3 + \frac{1}{\operatorname{tg}^5 x^5}$;
7) $f(x) = x^3 \operatorname{tg} x^3$;
8) $f(x) = \operatorname{tg} x^5 \sin x$?

3.67. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 137), сравните с нулем значение выражения:

1) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{15}$;
2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8}$;
3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{16}\right)$;
4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right)$;
5) $\operatorname{tg} 2{,}3$;
6) $\operatorname{tg} 5{,}1$;
7) $\operatorname{tg}(-1{,}8)$;
8) $\operatorname{tg}(-4{,}3)$.

3.68°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{tg} x$ на множестве D. Укажите для функции f:

а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки знакопостоянства, где $y < 0$; е) промежутки знакопостоянства, где $y > 0$; ж) нули, если:

1) $D = \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$;
2) $D = \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$;
3) $D = \left[-\frac{4\pi}{9}; -\frac{\pi}{6}\right]$;
4) $D = \left[\frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{15}\right]$;
5) $D = [0; 1]$;
6) $D = [-1; 0]$.

3.69°. Используя изображение графика функции $y = \operatorname{tg} x$ (см. рис. 137), найдите приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\operatorname{tg} 1$; 2) $\operatorname{tg} 4$; 3) $\operatorname{tg}(-2)$;
4) $\operatorname{tg}(-4)$; 5) $\operatorname{tg} 5{,}2$; 6) $\operatorname{tg}(-4{,}3)$.

3.70°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{tg} x$ на множестве D. Имеет ли функция f наибольшее значение, если:

1) $D = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$; 2) $D = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $D = \left[6\pi; \frac{13\pi}{2}\right)$; 4) $D = \left[-4\pi; -\frac{15\pi}{4}\right]$;
5) $D = (14; 15)$; 6) $D = [5; 7]$?

3.71°. Функция f задана формулой $y = \operatorname{tg} x$ на множестве D. Укажите промежутки, на которых функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения, если:

1) $D = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}\right]$; 2) $D = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right)$;
3) $D = \left[4\pi; \frac{9\pi}{2}\right)$; 4) $D = \left[-\frac{9\pi}{4}; -2\pi\right]$;
5) $D = (5; 7)$; 6)* $D = [14; 17]$.

3.72. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}(2x+3) = 0$; 2) $\operatorname{tg}(4x-5) = 0$;
3) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{6} + \frac{7\pi}{12}\right) = 0$.

3.73. Решите на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение $\operatorname{tg} x = a$, если a равно:

1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) -7; 6) -5; 7) 15; 8) 21.

3.74. Решите неравенство:

1) $\operatorname{tg}\frac{x}{6} \leqslant 0$; 2) $\operatorname{tg} 3x \leqslant 0$;
3) $\operatorname{tg}(2x-2) \geqslant 0$; 4) $\operatorname{tg}(3x+1) \leqslant 0$.

3.75*. Решите на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ неравенство: а) $\operatorname{tg} x < a$; б) $\operatorname{tg} x > a$; в) $\operatorname{tg} x \leqslant a$; г) $\operatorname{tg} x \geqslant a$, если a равно:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) -1;
5) 6; 6) π; 7) $-\frac{3}{7}$; 8) $-\frac{2}{9}$.

Изобразите на отрезке длиной $3T$ график функции, где T — наименьший положительный период этой функции **(3.76—3.78).**

3.76. 1) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$; 2) $y = \operatorname{tg} 3x$;
3) $y = \operatorname{tg} 4x - 2$; 4) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3$;
5) $y = \operatorname{tg}(x+1)$; 6) $y = \operatorname{tg}(x-2)$;
7) $y = 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - 1\right)$; 8) $y = 3\operatorname{tg}(2x+4)$;
9) $y = 2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) + 3$; 10) $y = 3\operatorname{tg}(2x+4) - 1$.

3.77*. 1) $y = \operatorname{tg}|x|$; 2) $y = -|\operatorname{tg} x|$;
3) $y = |2\operatorname{tg} x - 4|$; 4) $y = |3\operatorname{tg} x + 6|$;
5) $y = 2\operatorname{tg}(|x| - 1)$; 6) $y = 3\operatorname{tg}(|x| + 1)$;
7) $y = |2\operatorname{tg}(|x| - 1)|$; 8) $y = |3\operatorname{tg}(|x| + 1)|$.

3.78*. 1) $y = \frac{|x|}{x}\operatorname{tg} x$; 2) $y = \frac{x}{|x|}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;
3) $y = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^2$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$;
5) $y = \operatorname{tg}(-2x)\operatorname{ctg} 2x$; 6) $y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

3.7. Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Рассмотрим ***функцию котангенс***, заданную формулой $y = \operatorname{ctg} x$, с областью определения — множеством действительных чисел $x \neq \pi k$, $k \in Z$.

Изобразим график функции $y = \operatorname{ctg} x$. Сделаем это сначала на промежутке длиной, равной периоду котангенса.

Для этого заполним таблицу значений функции котангенс для значений аргумента на промежутке $(0; \pi)$, взятых через $\frac{\pi}{8}$ с точностью до 0,1. Приближенные значения котангенса

Адукацыйны партал www.adu.by

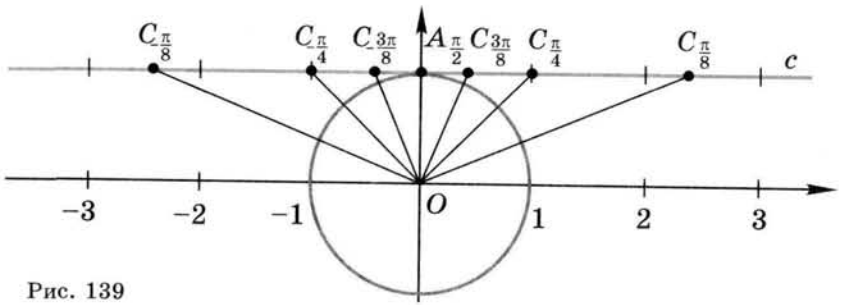


Рис. 139

можно найти, используя тригонометрическую окружность и линию котангенсов (рис. 139).

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$\operatorname{ctg} x$	—	2,4	1	0,4	0	−0,4	−1	−2,4	—

Отметив эти точки на координатной плоскости Oxy (рис. 140) и соединив их плавной линией (рис. 141), получим изображение графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$. Через точки 0 и π проведем вертикальные прямые $x = 0$ и $x = \pi$ (они не имеют общих точек с графиком функции котангенс, так как эта функция не определена в точках 0 и π) (см. рис. 141).

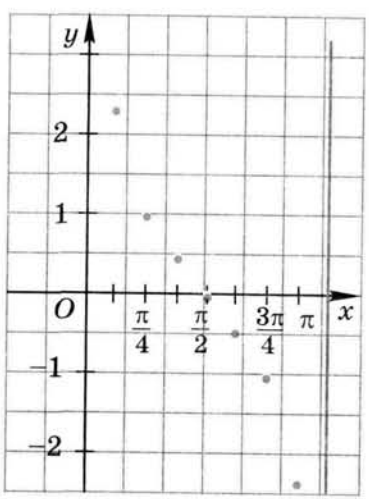


Рис. 140

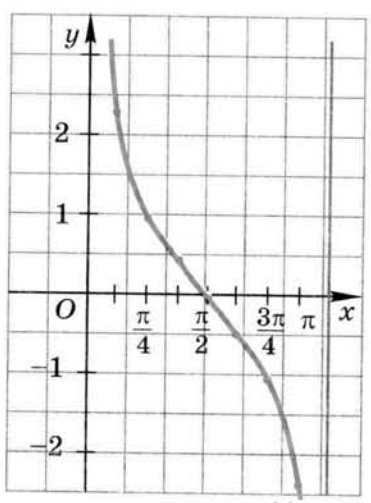


Рис. 141

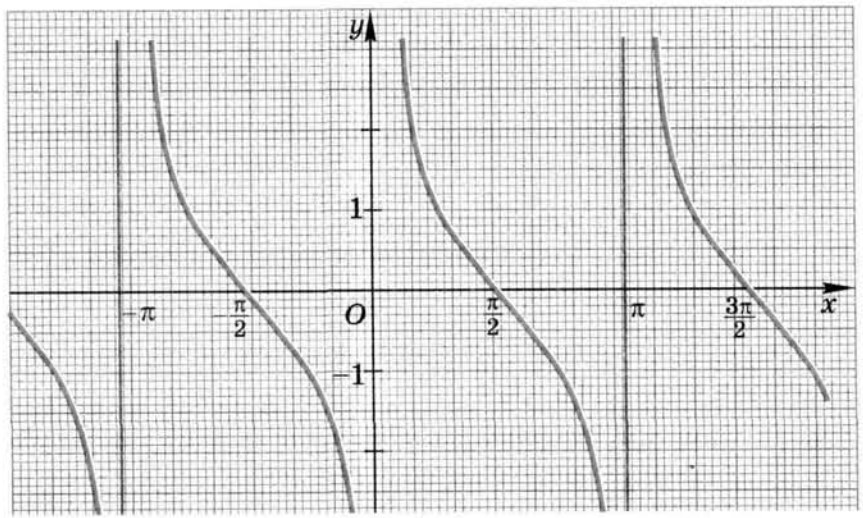


Рис. 142

Нами получено изображение графика на промежутке $(0; \pi)$, длина которого равна π — периоду котангенса. Сдвигая эту кривую вдоль оси Ox вправо и влево на π, получаем изображение графика функции $y = \operatorname{ctg} x$ (рис. 142).

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ называют ***котангенсоидой***. Кривую на каждом из промежутков $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, называют ***ветвью котангенсоиды*** — таких ветвей бесконечно много. Котангенсоида состоит из бесконечного множества одинаковых ветвей.

Изображение графика функции котангенс подсказывает все свойства этой функции (см. рис. 142).

Теорема (*о свойствах функции* $y = \operatorname{ctg} x$).

1. Область определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ — множество действительных чисел $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2. Область (множество) значений функции $y = \operatorname{ctg} x$ — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$.

3. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с периодом π.

4. Наибольшего и наименьшего значений функция $y = \operatorname{ctg} x$ не имеет.

5. Нулями функции $y = \operatorname{ctg} x$ являются значения аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

дукацыйны партал www.adu.by

6. Функция $y=\operatorname{ctg}x$ принимает отрицательные значения на каждом из промежутков $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \pi+\pi k\right)$, $k\in Z$, и положительные значения на каждом из промежутков $\left(\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

7. Функция $y=\operatorname{ctg}x$ нечетная.

8. Функция $y=\operatorname{ctg}x$ убывает на каждом из промежутков $(\pi k;\ \pi+\pi k)$, $k\in Z$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы о свойствах функции $y=\operatorname{tg}x$.

Заметим, что *функцию котангенс нельзя назвать убывающей во всей области определения, хотя у нее есть только промежутки убывания* (поясните почему).

▲ При изображении графика функции $y=\operatorname{ctg}x$ можно использовать геометрические преобразования графика функции $y=\operatorname{tg}x$. Поскольку

$$\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right),$$

то график функции $y=\operatorname{ctg}x$ является графиком функции $y=-\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, убедитесь в этом самостоятельно. ▲

Пример 1. Решить неравенство

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{5}+1\right)\leqslant 0.$$

Решение. Неположительные значения функция $y=\operatorname{ctg}u$ принимает при $\frac{\pi}{2}+\pi k\leqslant u<\pi+\pi k$, $k\in Z$ (эти промежутки легко прочесть по графику функции котангенс (см. рис. 142)). Для $u=\frac{x}{5}+1$ получаем:

$$\frac{\pi}{2}+\pi k\leqslant\frac{x}{5}+1<\pi+\pi k,\ k\in Z$$

(поясните, почему справа знак строгого неравенства);

$$-5+\frac{5}{2}\pi+5\pi k\leqslant x<-5+5\pi+5\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $\left[-5+\frac{5}{2}\pi+5\pi k;\ -5+5\pi+5\pi k\right)$, $k\in Z$.

Адукацыйны партал www.edu.by

▲**Пример 2.** Решить неравенство

$$\operatorname{ctg}x<1$$

на промежутке $(0;\ \pi)$.

Решение. Функция $y=\operatorname{ctg}x$ убывает на промежутке $(0;\ \pi)$ и по условию $\operatorname{ctg}<1$, т. е. $\operatorname{ctg}x<\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$, значит, $x>\frac{\pi}{4}$, но $x<\pi$. Итак, $\frac{\pi}{4}<x<\pi$ (рис. 143).

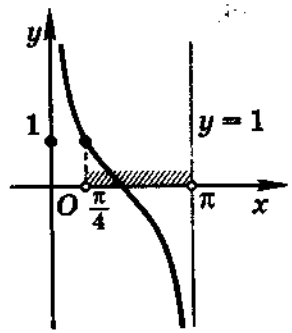


Рис. 143

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4};\ \pi\right)$. ▲

1. Назовите основные свойства функции котангенс.
2. Изобразите график функции $y=\operatorname{ctg}x$. Как называется график этой функции?
3. Можно ли функцию $y=\operatorname{ctg}x$ назвать убывающей на всей области определения? Почему?
4. Как на графике функции $y=\operatorname{ctg}x$ отражены свойства:
   а) нечетности;
   б) периодичности?
5. Докажите свойства 2—8 функции котангенс, указанные в теореме п. 3.7.
6. Чему равен наименьший положительный период функции котангенс?

Упражнения

3.79°. Укажите область определения и область (множество) значений функции f:

1) $f(x)=\operatorname{ctg}x+4$;
2) $f(x)=9-\operatorname{ctg}x$;
3) $f(x)=(\operatorname{ctg}x-4)^2$;
4) $f(x)=(\operatorname{ctg}x+9)^2$;
5) $f(x)=|\operatorname{ctg}x|-2$;
6) $f(x)=5-\sqrt{3\operatorname{ctg}^2x}$;
7) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ctg}^2x}$;
8) $f(x)=\frac{1}{\operatorname{ctg}^2x}-4$.

3.80. Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции:

1) $f(x)=\dfrac{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$; 2) $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$;

3) $f(x)=\dfrac{\operatorname{ctg}8x\operatorname{ctg}(-7x)+1}{\operatorname{ctg}8x-\operatorname{ctg}(-7x)}$; 4)* $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{ctg}6x\operatorname{ctg}(-5x)}{\operatorname{ctg}6x+\operatorname{ctg}(-5x)}$.

3.81. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$; $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$; $\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{7}$; $\operatorname{ctg}\frac{37\pi}{35}$;

2) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{8\pi}{11}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{37\pi}{14}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}(-6)$; $\operatorname{ctg}(-3)$; $\operatorname{ctg}4$; $\operatorname{ctg}(-4)$;

4) $\operatorname{ctg}4$; $\operatorname{ctg}8{,}1$; $\operatorname{ctg}3{,}1$; $\operatorname{ctg}5{,}9$.

3.82. Сравните:

1) $\operatorname{ctg}(-1{,}5\pi)$ и $\operatorname{ctg}(-1{,}6\pi)$; 2) $\operatorname{ctg}(-5{,}2\pi)$ и $\operatorname{ctg}(-4{,}9\pi)$;
3) $\operatorname{ctg}2$ и $\operatorname{ctg}3$; 4) $\operatorname{ctg}6$ и $\operatorname{ctg}5$;
5) $\operatorname{ctg}(-5{,}1)$ и $\operatorname{ctg}(-4{,}2)$; 6) $\operatorname{ctg}(-7{,}6)$ и $\operatorname{ctg}(-6{,}2)$.

3.83°. Установите, четной или нечетной является функция f:

1) $f(x)=\operatorname{ctg}^2x+4$; 2) $f(x)=x\sin x\operatorname{ctg}x$;
3) $f(x)=2\sin^4x\operatorname{ctg}^5x^3$; 4) $f(x)=\operatorname{ctg}x^3-\operatorname{tg}^{11}x^5$;
5) $f(x)=\dfrac{3x^7}{\operatorname{ctg}x^3}$; 6) $f(x)=(\operatorname{ctg}x)^3+\dfrac{1}{\sin x^3}$;

7) $f(x)=\dfrac{\operatorname{ctg}^2x}{1+\sin^2x}+\cos x$; 8) $f(x)=\dfrac{\sin^2x\sin\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}x}+\sqrt{\operatorname{ctg}^2x}$.

3.84. Используя график функции $y=\operatorname{ctg}x$ (см. рис. 142), сравните с нулем значение выражения:

1) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{7}$;
3) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{11}\right)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right)$;
5) $\operatorname{ctg}5{,}1$; 6) $\operatorname{ctg}4{,}9$;
7) $\operatorname{ctg}(-2{,}5)$; 8) $\operatorname{ctg}(-4{,}3)$.

3.85°. Функция f задана формулой $y=\operatorname{ctg}x$ на множестве D. Укажите для функции f:

а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки знакопостоянства, где $y<0$; е) промежутки знакопостоянства, где $y>0$; ж) нули, если:

1) $D=\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$; 2) $D=\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$;
3) $D=\left[-\frac{7\pi}{9};-\frac{\pi}{6}\right]$; 4) $D=\left[\frac{\pi}{10};\frac{\pi}{2}\right]$;
5) $D=[1;2]$; 6) $D=[4;6]$.

3.86. Используя изображение графика функции $y=\operatorname{ctg}x$ (см. рис. 142), найдите приближенное значение выражения (с точностью до 0,1):

1) $\operatorname{ctg}4$; 2) $\operatorname{ctg}5$;
3) $\operatorname{ctg}(-1)$; 4) $\operatorname{ctg}(-0{,}5)$.

3.87°. Функция задана формулой $y=\operatorname{ctg}x$ на множестве D. Имеет ли функция f наибольшее значение, если:

1) $D=\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$; 2) $D=\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$;
3) $D=\left[\frac{13\pi}{2};\frac{41\pi}{6}\right)$; 4) $D=\left[-4{,}5\pi;-\frac{17\pi}{4}\right]$;
5) $D=(7;8)$; 6) $D=[20;22]$?

3.88°. Функция задана формулой $y=\operatorname{ctg}x$ на множестве D. Укажите промежутки, на которых функция принимает: а) положительные значения; б) отрицательные значения, если:

1) $D=\left(-2\pi;\frac{5\pi}{4}\right]$; 2) $D=\left(-2\pi;\frac{11\pi}{6}\right]$;
3) $D=\left[\frac{5\pi}{2};\frac{9\pi}{2}\right)$; 4) $D=\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{4}\right]$;
5) $D=(1;5)$; 6) $D=[4;12]$.

3.89. Решите уравнение:

1) $\operatorname{ctg}(3x-2)=0$; 2) $\operatorname{ctg}(0{,}5x+3)=0$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{5x}{2}+\frac{5\pi}{6}\right)=0$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3x}{8}-\frac{\pi}{12}\right)=0$.

Адукацыйны партал www.adu.by

3.90. Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ на промежутке $(0; \pi)$, если a равно:

1) 1; 2) -1; 3) $-\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) -9; 6) -8; 7) 37; 8) 43.

3.91. Решите неравенство:

1) $\operatorname{ctg}\frac{x}{6} \leqslant 0$; 2) $\operatorname{ctg} 3x < 0$;
3) $\operatorname{ctg}\frac{4x}{3} > 0$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{4} \geqslant 0$;
5) $\operatorname{ctg}(2x-2) > 0$; 6) $\operatorname{ctg}(3x+1) \leqslant 0$.

3.92*. Решите на промежутке $(0; \pi)$ неравенство:

а) $\operatorname{ctg} x < a$; б) $\operatorname{ctg} x > a$;
в) $\operatorname{ctg} x \leqslant a$; г) $\operatorname{ctg} x \geqslant a$, если a равно:

1) $-\sqrt{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) 1;
5) $-\sqrt{17}$; 6) $-\pi$; 7) $\frac{2}{9}$; 8) $\frac{3}{7}$.

Изобразите график функции на отрезке длиной, равной $2T$, где T — наименьший положительный период этой функции (3.93—3.95).

3.93*. 1) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; 2) $y = \operatorname{ctg} 3x$;
3) $y = \operatorname{ctg} 2x - 1$; 4) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + 2$;
5) $y = \operatorname{ctg}(x+1) - 2$; 6) $y = \operatorname{ctg}(x-2) + 3$;
7) $y = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + 4$; 8) $y = 3\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\right) - 2$.

3.94*. 1) $y = -|\operatorname{ctg} x|$; 2) $y = \operatorname{ctg}|x|$;
3) $y = |0{,}5\operatorname{ctg} x - 4|$; 4) $y = |3\operatorname{ctg} x + 6|$;
5) $y = 3\operatorname{ctg}(|x| - 2)$; 6) $y = 2\operatorname{ctg}(|x| + 4)$;
7) $y = \left|3\operatorname{ctg}(|x| - 2)\right|$; 8) $y = \left|2\operatorname{ctg}(|x| + 4)\right|$.

3.95*. 1) $y = \frac{|2x|}{x}\operatorname{ctg} x$; 2) $y = \frac{x}{|2x|}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$;
3) $y = \left(\sqrt{\operatorname{ctg} x}\right)^2$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$;
5) $y = \operatorname{tg} 2x \operatorname{ctg} 2x$; 6) $y = \operatorname{tg}(-0{,}5x)\operatorname{ctg} 0{,}5x$.

Адукацыйны партал www.adu.by

▲ 3.8. Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$

Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Когда аргумент x «пробегает» множество всех действительных чисел, функция y принимает все значения от -1 до $+1$, причем каждое такое значение она принимает бесконечно много раз.

Однако в области определения функции $y = \sin x$ есть такие промежутки, на которых она принимает каждое из значений от -1 до $+1$ ровно один раз. Например, на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $y = \sin x$ возрастает от -1 до $+1$.

Таким образом, если рассматривать функцию, заданную формулой $y = \sin x$, в области определения $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 144), то не только каждому значению x из этого промежутка соответствует единственное значение y из промежутка $[-1; 1]$, но и, наоборот, каждому значению y из промежутка $[-1; 1]$ соответствует единственное значение x из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, такое, что $y = \sin x$. Напомним, что это значение x обозначают $\arcsin y$, а равенство $x = \arcsin y$ означает, что $y = \sin x$ и $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (см. п. 2.6).

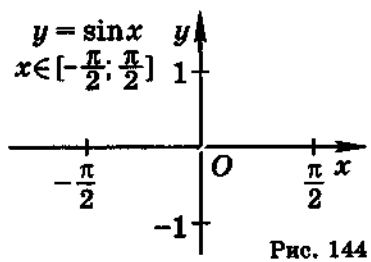


Рис. 144

Формулой $x = \arcsin y$ каждому значению y из промежутка $[-1; 1]$ ставится в соответствие единственное значение x из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тем самым формулой $x = \arcsin y$ задается функция с областью определения — промежутком $[-1; 1]$. Здесь y рассматривается как аргумент (независимая переменная), а x — как функция (зависимая переменная). Чтобы сохранить привычные обозначения, буквы x и y в этой формуле меняют местами и пишут $y = \arcsin x$.

Изобразим график функции $y = \arcsin x$ красным цветом (рис. 145). Заметим, что *точки $M(a; b)$ и $N(b; a)$ симметричны относительно прямой $y = x$.*

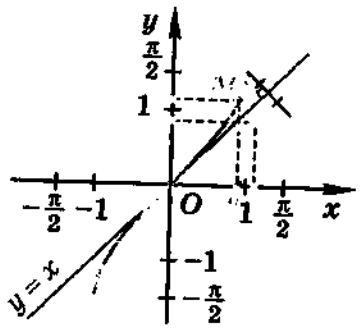


Рис. 145

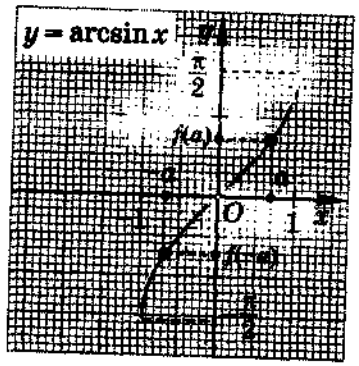


Рис. 146

Пусть точка $M(a; b)$ лежит на графике функции $y = \arcsin x$. Это означает, что верно числовое равенство $b = \arcsin a$, а значит, верно и числовое равенство $a = \sin b$, $b \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. В свою очередь, последнее утверждение означает, что точка $N(b; a)$ лежит на графике функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Таким образом, каждой точке M на графике функции $y = \arcsin x$ соответствует симметричная ей относительно прямой $y = x$ точка N на графике функции, заданной формулой $y = \sin x$, с областью определения — отрезком $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и наоборот.

Следовательно, *графики функций* $y = \sin x$ *с областью определения* $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ *и* $y = \arcsin x$ *симметричны относительно прямой* $y = x$ (см. рис. 145).

На рисунке 146 график функции $y = \arcsin x$ изображен отдельно.

Теорема (*о свойствах функции* $y = \arcsin x$).

1. Область определения функции $y = \arcsin x$ — промежуток $[-1; 1]$.

2. Область (множество) значений функции $y = \arcsin x$ — промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Функция $y = \arcsin x$ не является периодической.

4. Наименьшее значение $y = -\frac{\pi}{2}$ функция $y = \arcsin x$ принимает в точке $x = -1$.

Наибольшее значение $y = \frac{\pi}{2}$ функция $y = \arcsin x$ принимает в точке $x = 1$.

5. Нулем функции $y = \arcsin x$ является значение аргумента $x = 0$.

6. Функция $y = \arcsin x$ принимает отрицательные значения на промежутке $[-1; 0)$ и положительные значения на промежутке $(0; 1]$.

7. Функция $y = \arcsin x$ нечетная.

8. Функция $y = \arcsin x$ возрастающая в области определения.

Доказательство. Свойства 1—5 непосредственно следуют из определения. Свойство 6 следует из свойств 5 и 8 (объясните почему). Свойство 7 доказано в п. 2.16 (пример 2).

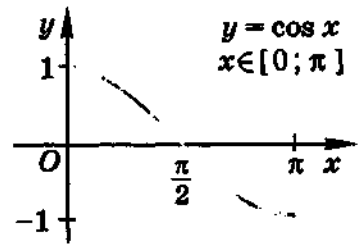
Докажем свойство 8. Допустим противное, т. е. допустим, что $x_1 < x_2$, и при этом $\arcsin x_1 \geqslant \arcsin x_2$. Тогда

$$\sin(\arcsin x_1) \geqslant \sin(\arcsin x_2),$$

так как $\arcsin x_1$ и $\arcsin x_2$ принадлежат промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а на этом промежутке функция синус возрастает. Отсюда следует: $x_1 = \sin(\arcsin x_1) \geqslant \sin(\arcsin x_2) = x_2$, т.е. $x_1 \geqslant x_2$.

Получили противоречие с условием $x_1 < x_2$. Значит, допущение неверно. ☒

Рассмотрим функцию $y = \cos x$. В области определения функции $y = \cos x$ есть такие промежутки, на которых она принимает каждое из значений от -1 до $+1$ ровно один раз. Например, на промежутке $[0; \pi]$ функция $y = \cos x$ убывает от $+1$ до -1.



Таким образом, если рассматривать функцию, заданную формулой $y = \cos x$, в области определения $[0; \pi]$ (рис. 147), то не только каждому значению x из

Адукацыйны партал www.adu.by

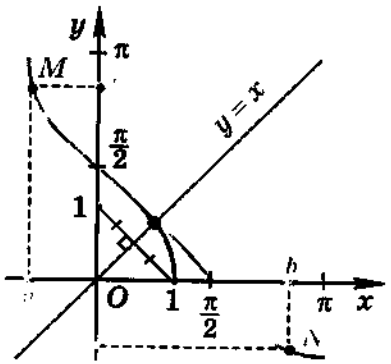


Рис. 148

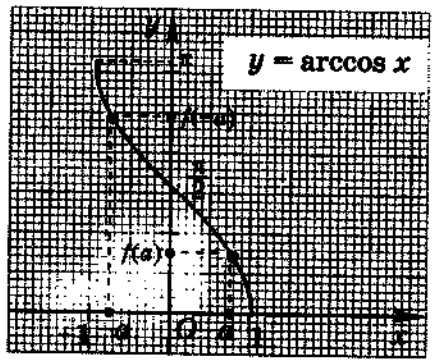


Рис. 149

единственное значение y из промежутка $[-1; 1]$, но и, наоборот, каждому значению y из промежутка $[-1; 1]$ соответствует единственное значение x из промежутка $[0; \pi]$, такое, что $y = \cos x$. Напомним, что это значение x обозначается $\arccos x$, а равенство $x = \arccos y$ означает, что $y = \cos x$ и $x \in [0; \pi]$ (см. п. 2.6).

Формулой $x = \arccos y$ каждому значению y из промежутка $[-1; 1]$ ставится в соответствие единственное значение x из промежутка $[0; \pi]$. Тем самым формулой $x = \arccos y$ задается функция с областью определения — промежутком $[-1; 1]$. Здесь y рассматривается как аргумент (независимая переменная), а x — как функция (зависимая переменная). Чтобы сохранить привычные обозначения, буквы x и y в этой формуле меняют местами и пишут $y = \arccos x$.

График функции $y = \arccos x$ *симметричен графику функции* $y = \cos x$ *с областью определения* $[0; \pi]$ *относительно прямой* $y = x$ (рис. 148). Итак, если точка $M(a; b)$ лежит на графике функции $y = \arccos x$, то точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $y = \cos x$ ($x \in [0; \pi]$). (Доказывается, как аналогичное утверждение для функции $y = \arcsin x$.)

На рисунке 149 график функции $y = \arccos x$ изображен отдельно.

Теорема (*о свойствах функции* $y = \arccos x$).

1. Область определения функции $y = \arccos x$ — промежуток $[-1; 1]$.

2. Область (множество) значений функции $y = \arccos x$ — промежуток $[0; \pi]$.

3. Функция $y = \arccos x$ не является периодической.

4. Наименьшее значение $y = 0$ функция $y = \arccos x$ принимает в точке $x = 1$. Наибольшее значение $y = \pi$ функция $y = \arccos x$ принимает в точке $x = -1$.

5. Нулем функции $y = \arccos x$ является значение аргумента $x = 1$.

6. Функция $y = \arccos x$ отрицательных значений не принимает, положительные значения принимает на промежутке $[-1; 1)$.

7. Функция $y = \arccos x$ не является нечетной и не является четной.

8. Функция $y = \arccos x$ убывающая в области определения.

Проведите доказательство самостоятельно, ориентируясь на то, как доказываются аналогичные свойства для функции арксинус.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения выражения

$$\arccos x - \frac{3\pi}{2}.$$

Решение. В области определения (на промежутке $[-1; 1]$) функция $y = \arccos x$ имеет наименьшее значение 0 и наибольшее значение π. Значит, наименьшим значением выражения $\arccos x - \frac{3\pi}{2}$ является число $0 - \frac{3\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$, а наибольшим значением — число $\pi - \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$ — наименьшее значение;

$-\frac{\pi}{2}$ — наибольшее значение.

Пример 2. Изобразить график функции:

а) $y = \cos(\arccos x)$;

б) $y = |\arccos x - 1|$;

в) $y = \arccos(|x| - 1)$.

Адукацыйны партал www.edu.by

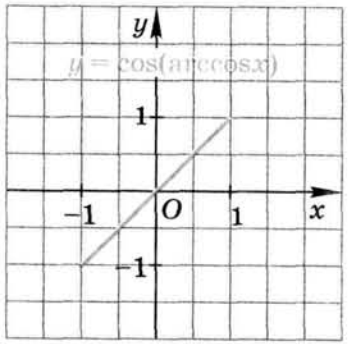


Рис. 150

Решение.

а) Равенство $y=\cos(\arccos x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} y = x, \\ x \in [-1;\ 1]. \end{cases}$$

Таким образом, изображением графика данной функции является отрезок прямой $y=x$ (рис. 150).

б) Сначала изобразим график функции $y=\arccos x-1$ (рис. 151), а затем график функции $y=|\arccos x-1|$ (рис. 152).

в) Сначала изобразим график функции $y=\arccos(x-1)$ (рис. 153), а затем график функции $y=\arccos(|x|-1)$ (рис. 154).

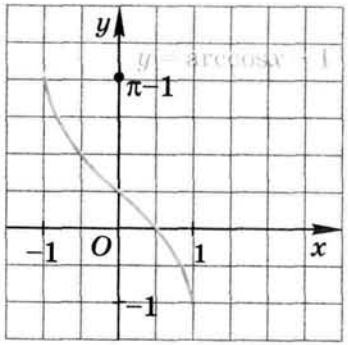


Рис. 151

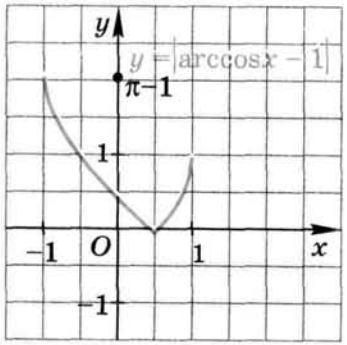


Рис. 152

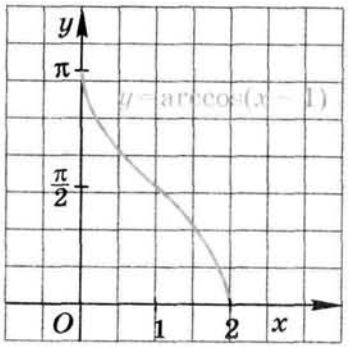


Рис. 153

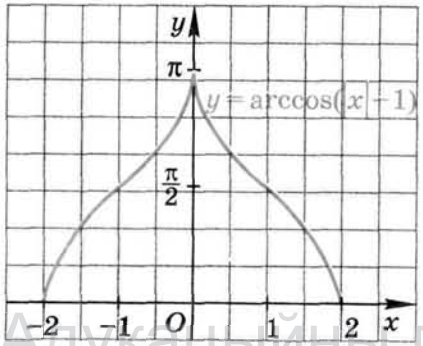


Рис. 154

Адукацыйны партал www.adu.by

Пример 3. Решить уравнение:

а) $\arcsin(3x+5)=0$; б) $\arccos\left(\frac{x}{3}-4\right)=\pi$.

Решение. а) Нулем функции $y=\arcsin u$ является $u=0$. При $u=3x+5$ имеем $3x+5=0$, откуда $x=-\frac{5}{3}$.

б) Значение $y=\pi$ функция $y=\arccos u$ принимает в точке $u=-1$, поэтому при $u=\frac{x}{3}-4$ получаем $\frac{x}{3}-4=-1$, откуда $x=9$.

Ответ: а) $-\frac{5}{3}$; б) 9.

Пример 4. Решить неравенство:

а) $\arcsin(2x+1)<\frac{\pi}{3}$; б) $\arccos\left(\frac{2x}{3}-4\right)\geqslant\frac{2\pi}{3}$.

Решение. а) *Способ 1.* Пусть $2x+1=u$. Изобразим в одной системе координат графики функций $y=\arcsin u$ и $y=\frac{\pi}{3}$ (рис. 155). Они пересекаются в точке $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{\pi}{3}\right)$. Неравенства $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin u<\frac{\pi}{3}$ и $-1\leqslant u<\frac{\sqrt{3}}{2}$ равносильны. Подставляя в последнее неравенство $u=2x+1$ и решая его относительно x, получаем:

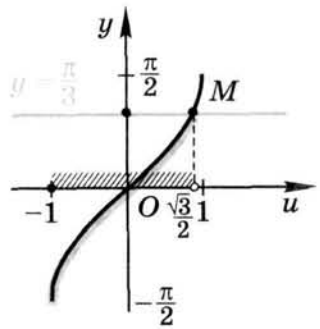


Рис. 155

$$-1\leqslant x<\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}-2}{4}\right)$.

Способ 2. По условию имеем $\arcsin(2x+1)<\frac{\pi}{3}$, т. е.

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(2x+1)<\frac{\pi}{3}.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leqslant\sin(\arcsin(2x+1))<\sin\frac{\pi}{3},$$

поскольку функция синус возрастающая на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решая последнее неравенство, получаем:

$$-1\leqslant 2x+1<\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{т. е. } -1\leqslant x<\frac{\sqrt{3}-2}{4}.$$

Решите самостоятельно неравенство б) способом 1 и способом 2, используя риснок 156 (см. решение а)).

Ответ: $\left[\frac{9}{2}; \frac{21}{4}\right]$.

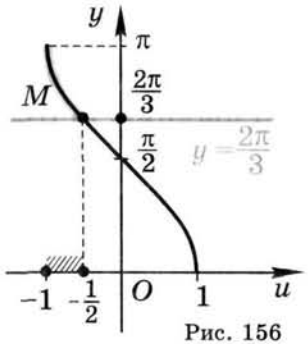


Рис. 156

1. Что означает равенство:
   а) $x = \arcsin y$;
   б) $x = \arccos y$?
2. Докажите, что графики функций $y = \arccos x$ и $y = \cos x$ ($x \in [0; \pi]$) симметричны относительно прямой $y = x$.
3. Сформулируйте теорему о свойствах функции:
   а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$.
4. Докажите свойства функции:
   а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$.

Упражнения

3.96°. Среди чисел $-\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\sqrt{5}$, $\frac{5\pi}{4}$ укажите те, которые могут быть значениями выражения:

1) $\arcsin b$; 2) $\arccos b$.

Укажите область определения и область (множество) значений функции f **(3.97—3.98).**

3.97°. 1) $f(x) = \arcsin 3x$; 2) $f(x) = \arccos 2x$;
3) $f(x) = \arccos(-5x)$; 4) $f(x) = \arcsin(-3x)$;
5) $f(x) = \arcsin\left(-\frac{x}{2}\right)$; 6) $f(x) = \arccos\left(-\frac{x}{6}\right)$;
7) $f(x) = \arccos\left(-\frac{2x}{3} + 1\right)$; 8) $f(x) = \arcsin\left(-\frac{x}{2} - 3\right)$;
9) $f(x) = \arcsin\frac{2}{x}$; 10) $f(x) = \arccos\frac{6}{x}$.

3.98. 1) $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$; 2) $f(x) = \arccos\sqrt{-x}$;
3) $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$; 4) $f(x) = \sqrt{\arccos x}$;
5) $f(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$; 6) $f(x) = \pi - \arccos x$.

Адукацыйны партал www.adu.by

3.99°. Имеет ли смысл выражение:

1) $\arcsin\sqrt{2}$; 2) $\arccos\left(\sqrt{3} - 1\right)^2$;
3) $\arccos\frac{3\pi}{2}$; 4) $\arcsin\sqrt{\pi - 2}$;
5) $\arcsin\frac{a^4}{a^4 + 1}$; 6) $\arccos\frac{a^4 + 1}{a^4}$?

3.100. Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции:

1) $y = \arcsin(2 - 0{,}1x)$; 2) $y = \arccos(0{,}6 - 12x)$;
3) $y = \arccos(4 - 0{,}2x)$; 4) $y = \arcsin(0{,}5 - 5x)$;
5) $y = \arcsin(x^2 + 2x + 1)$; 6) $y = \arccos(4x^2 - 4x + 1)$;
7) $y = \arcsin(x^2 - 2x + 1)$; 8) $y = \arccos(4x^2 + 4x + 1)$.

3.101. Какому из числовых промежутков $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ принадлежит каждое из чисел $\arcsin b$ и $\arccos b$, если b равно:

1) $-0{,}48$; 2) $-\frac{2}{7}$; 3) $-\sqrt{\frac{\pi}{5}}$;
4) $\frac{11}{13}$; 5) $0{,}95$; 6) 1?

3.102. Расположите в порядке возрастания числа:

1) $\arcsin\frac{1}{3}$; $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$; $\arcsin\frac{\pi}{4}$;
2) $\arcsin\frac{\pi}{5}$; $\arcsin(-0{,}6)$; $\arcsin 0{,}9$;
3) $\arccos 0$; $\arccos(-0{,}7)$; $\arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$;
4) $\arccos\frac{\pi}{8}$; $\arccos(-0{,}5)$; $\arccos(-0{,}9)$.

3.103°. Установите, четной или нечетной является функция f:

1) $f(x) = \sin x + \frac{\arccos|x|}{2\arcsin x}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} x - \frac{5\arccos|x|}{\arcsin x}$;
3) $f(x) = \arcsin x + 4\arcsin 2x$;
4) $f(x) = \arcsin x \arcsin 2x$;
5) $f(x) = \arcsin^2 x + \sin x \arcsin 2x$;
6) $f(x) = \sqrt{\arcsin^2 x + 4\arccos|x|}$.

3.104°. Функция задана формулой $y=f(x)$ на множестве D. Укажите для нее: а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки знакопостоянства, где $y<0$; е) промежутки знакопостоянства, где $y>0$; ж) нули, если:

1) $f(x)=\arcsin x$, $D=\left[0;\frac{1}{2}\right]$;

2) $f(x)=\arccos x$, $D=\left[-\frac{1}{2};0\right)$;

3) $f(x)=\arccos x$, $D=\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$;

4) $f(x)=\arcsin x$, $D=\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;

5) $f(x)=\arcsin x$, $D=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right]$;

6) $f(x)=\arccos x$, $D=\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

3.105*. Используя изображения графиков функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ (см. рис. 146, 149), найдите приближенное значение (с точностью до 0,1) выражения:

1) $\arcsin 0{,}4$; 2) $\arccos 0{,}8$;
3) $\arccos(-0{,}2)$; 4) $\arcsin(-0{,}7)$.

3.106. Решите уравнение:

1) $\arcsin(1-2x)=-\frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos(3-6x)=\pi$;
3) $\arccos(15-2x-x^2)=\frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin(x^2+10x-23)=\frac{\pi}{2}$;
5) $\arcsin(x^2-10x+9)=0$; 6) $\arccos(x^2+14x+12)=0$;
7) $\arccos(12x+1)=-\frac{\pi}{2}$; 8) $\arcsin(10x-6)=\pi$.

3.107. Используя изображения графиков функций $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ (см. рис. 146, 149), решите приближенно (с точностью до 0,1) уравнение:

1) $\arcsin x=\frac{3\pi}{8}$; 2) $\arccos x=\frac{5\pi}{8}$;
3) $\arccos x=\frac{7\pi}{5}$; 4) $\arcsin x=-\frac{11\pi}{12}$;
5) $\arcsin x=1{,}5$; 6) $\arccos x=2{,}8$;
7) $\arccos x=2$; 8) $\arcsin x=1$.

Решите неравенство **(3.108—3.110).**

3.108. 1) $\arcsin(x+1)\leqslant 0$; 2) $\arccos(x+10)\leqslant 0$;
3) $\arccos(x-12)\geqslant \pi$; 4) $\arcsin(4x-2)\geqslant -\frac{\pi}{2}$;
5) $\arccos(6x-1)\geqslant \frac{\pi}{2}$; 6) $\arcsin(5-4x)\geqslant -\frac{\pi}{2}$.

3.109*. 1) $\arcsin x>0{,}3$; 2) $\arcsin x<-0{,}7$;
3) $\arcsin x\geqslant -1{,}5$; 4) $\arcsin x\leqslant 1{,}2$;
5) $\arcsin x<2$; 6) $\arcsin x\geqslant 2$;
7) $\arccos x>0{,}2$; 8) $\arccos x<0{,}8$;
9) $\arccos x\leqslant 3$; 10) $\arccos x\geqslant 1{,}6$;
11) $\arccos x\leqslant 4$; 12) $\arccos x>4$.

3.110*. 1) $\arcsin x<\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x\leqslant \frac{\pi}{4}$;
3) $\arccos x>\frac{2\pi}{3}$; 4) $\arcsin x\geqslant -\frac{\pi}{3}$;
5) $\arcsin x>\frac{\pi}{4}$; 6) $\arccos x\geqslant \frac{\pi}{3}$;
7) $\arccos x<\frac{5\pi}{6}$; 8) $\arcsin x\leqslant -\frac{\pi}{6}$.

3.111*. При каких значениях p существуют такие значения x, при которых будет верным равенство:

1) $\arcsin^2 x=p$; 2) $|\arccos x|=p$;
3) $\arccos x=-p-\pi$; 4) $\arcsin x=p+\frac{\pi}{2}$;
5) $\arcsin x=\frac{p}{p+0{,}4\pi}$; 6) $\arccos x=\frac{p-0{,}1\pi}{p}$?

Изобразите график функции **(3.112—3.114).**

3.112. 1) $y=-\arcsin x$; 2) $y=-\arccos x$;
3) $y=\arccos(-x)$; 4) $y=\arcsin(-x)$;
5) $y=2\arcsin x$; 6) $y=\frac{1}{2}\arccos x$;
7) $y=\arccos\frac{x}{3}$; 8) $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

3.113*. 1) $y=2\arcsin\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)-1{,}5$; 2) $y=-2\arccos\left(\frac{x}{2}+1\right)+3$;
3) $y=3\arccos(2x-6)+3$; 4) $y=-4\arcsin(3x-1)+1$.

Адукацыйны партал www.add.by

3.114*. 1) $y = \arcsin|x|$; 2) $y = \arccos|x|$;
3) $y = -\arccos|x|$; 4) $y = -\arcsin|x|$;
5) $y = |0{,}5\arcsin x - 1|$; 6) $y = |0{,}5\arccos x - 1|$;
7) $y = \left|\frac{3}{2}\arccos(2x+6) - 2\right|$; 8) $y = \left|\frac{3}{2}\arcsin(2x+4) - 1\right|$.

▲ 3.9. Функции $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$. В области определения этой функции $y = \operatorname{tg} x$ есть такие промежутки, на которых она принимает каждое значение из множества действительных чисел ровно один раз. Например, на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом, если рассматривать функцию, заданную формулой $y = \operatorname{tg} x$, в области определения $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 157), то каждому значению y из множества R соответствует единственное значение x из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такое, что $y = \operatorname{tg} x$. Напомним, что это значение x обозначается $\operatorname{arctg} y$, а равенство $x = \operatorname{arctg} y$ означает, что $y = \operatorname{tg} x$ и $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (см. п. 2.8).

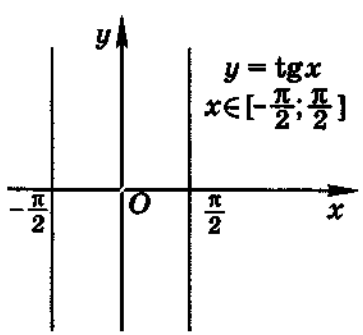


Рис. 157

Формулой $x = \operatorname{arctg} y$ каждому значению y из множества R ставится в соответствие единственное значение x из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тем самым формулой $x = \operatorname{arctg} y$ задается функция с областью определения — множеством всех действительных чисел R. Здесь y рассматривается как аргумент (независимая переменная), а x — как функция (зависимая переменная). Чтобы сохранить привычные обозначения, буквы x и y в этой формуле меняют местами и пишут $y = \operatorname{arctg} x$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \operatorname{tg} x$ с областью определения $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 158). Итак, если точка $M(a; b)$ лежит на

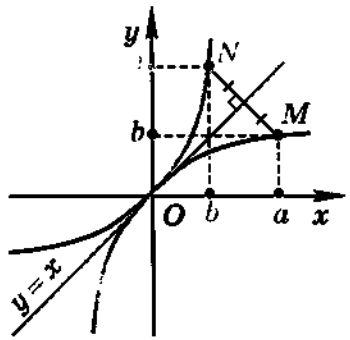


Рис. 158

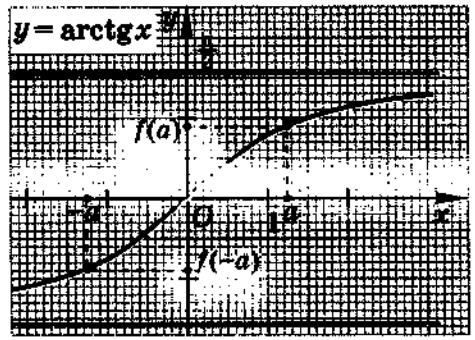


Рис. 159

графике функции $y = \operatorname{arctg} x$, то точка $N(b; a)$ принадлежит графику функции $y = \operatorname{tg} x$ $\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$. (Доказывается, как аналогичное утверждение для функции $y = \arcsin x$.)

На рисунке 159 график функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен отдельно.

Теорема (*о свойствах функции $y = \operatorname{arctg} x$*).

1. Область определения функции $y = \operatorname{arctg} x$ — множество всех действительных чисел R.
2. Область (множество) значений функции $y = \operatorname{arctg} x$ — промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ не является периодической.
4. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений.
5. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ имеет единственный нуль в точке $x = 0$.
6. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ принимает отрицательные значения на интервале $(-\infty; 0)$ и положительные значения — на интервале $(0; +\infty)$.
7. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечетная.
8. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ возрастающая в области определения.

Проведите доказательство самостоятельно, ориентируясь на то, как доказываются аналогичные свойства для функции арксинус.

Адукацыйны партал www.adu.by

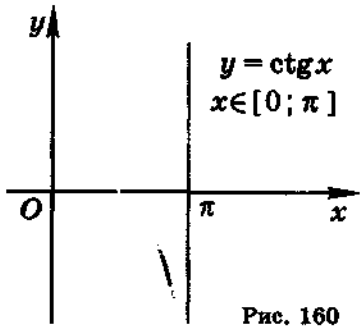


Рис. 160

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{ctg} x$. В области определения функции $y = \operatorname{ctg} x$ есть такие промежутки, на которых она принимает каждое значение из множества действительных чисел ровно один раз. Например, на промежутке $(0; \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает от $-\infty$ до $+\infty$.

Таким образом, если рассматривать функцию, заданную формулой $y = \operatorname{ctg} x$, в области определения $(0; \pi)$ (рис. 160), то каждому значению x из этого промежутка соответствует единственное значение y из множества R, но и, наоборот, каждому значению y из множества R соответствует единственное значение x из промежутка $(0; \pi)$, такое, что $y = \operatorname{ctg} x$. Напомним, что это значение x обозначается $\operatorname{arcctg} y$, а равенство $x = \operatorname{arcctg} y$ означает, что $y = \operatorname{ctg} x$ и $x \in (0; \pi)$.

Формулой $x = \operatorname{arcctg} y$ каждому значению y из промежутка $(-\infty; +\infty)$ ставится в соответствие единственное значение x из промежутка $(0; \pi)$. Тем самым формулой $x = \operatorname{arcctg} y$ задается функция с областью определения — промежутком $(-\infty; +\infty)$, т. е. множеством всех действительных чисел R. Здесь y рассматривается как аргумент (независимая переменная), а x — как функция (зависимая переменная). Чтобы сохранить привычные обозначения, буквы x и y в этой формуле меняют местами и пишут $y = \operatorname{arcctg} x$.

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ с областью определения $(0; \pi)$ (рис. 161).

На рисунке 162 график функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен отдельно.

Теорема (*о свойствах функции $y = \operatorname{arcctg} x$*).

1. Область определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$ — множество всех действительных чисел R.

2. Область (множество) значений функции $y = \operatorname{arcctg} x$ — интервал $(0; \pi)$.

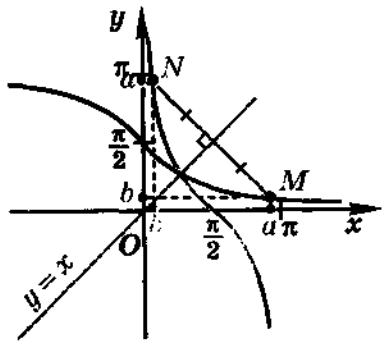


Рис. 161

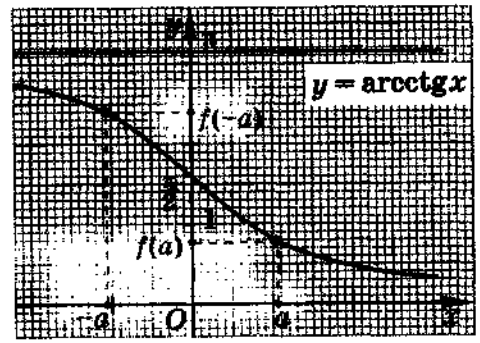


Рис. 162

3. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не является периодической.

4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значений.

5. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не имеет нулей.

6. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ во всей области определения принимает только положительные значения.

7. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ не является четной и не является нечетной.

8. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ убывающая в области определения.

Доказательство этих свойств можно провести аналогично доказательству свойств для функции арксинус.

Определение. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ называются *обратными тригонометрическими функциями*.

Пример 1. Решить уравнение:

а) $\operatorname{arctg}(5x - 8) = \frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arcctg}\left(\frac{3x}{2} - \pi\right) = 0$.

Решение. а) Имеем $\operatorname{arctg}(5x - 8) = \operatorname{acrtg} 1$, значит, $5x - 8 = 1$, откуда находим $x = \frac{9}{5}$.

б) Имеем $\operatorname{arcctg}\left(\frac{3x}{2} - \pi\right) = \operatorname{arcctg}\frac{\pi}{2}$, значит, $\frac{3x}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$, откуда находим $x = \pi$.

Ответ: а) 1,8; б) π.

дукацыйны партал www.adu.by

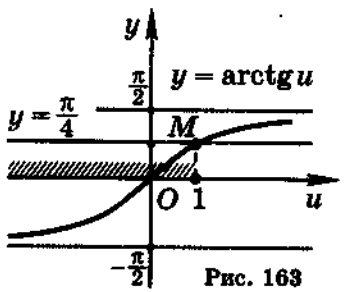


Рис. 163

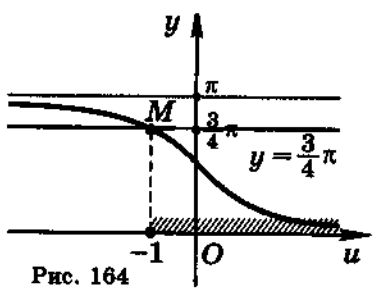


Рис. 164

Пример 2. Решить неравенство:

а) $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2} - 5\right) \leqslant \frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{arcctg}(3x+1) < \frac{3\pi}{4}$.

Решение. а) *Способ 1.* Пусть $\frac{x}{2} - 5 = u$, тогда $\operatorname{arctg} u \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Рассмотрим на рисунке 163 изображения графиков функций $y = \operatorname{arctg} u$ и $y = \frac{\pi}{4}$. Они пересекаются в точке $M\left(1; \frac{\pi}{4}\right)$. Мы видим, что неравенства $\operatorname{arctg} u \leqslant \frac{\pi}{4}$ и $u \leqslant 1$ равносильны.

Подставляя в последнее неравенство $u = \frac{x}{2} - 5$ и решая его относительно x, получаем:

$$\frac{x}{2} - 5 \leqslant 1, \text{ откуда } \frac{x}{2} \leqslant 6, \text{ т. е. } x \leqslant 12.$$

Ответ: $(-\infty; 12]$.

Способ 2. По условию имеем $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2} - 5\right) \leqslant \operatorname{arctg} 1$. Поскольку функция тангенс возрастающая, то данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x}{2} - 5 \leqslant 1, \text{ откуда } x \leqslant 12.$$

б) Решите неравенство каждым из двух способов (см. решение а)), используя, при необходимости, рисунок 164.

Ответ: $(-1; +\infty)$.

1. Докажите, что графики функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{tg} x$ $\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right)$ симметричны относительно прямой $y = x$.
2. Докажите, что графики функций $y = \operatorname{arcctg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ $(x \in (0; \pi))$ симметричны относительно прямой $y = x$.

3. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах функции:
   а) $y = \operatorname{arctg} x$; б) $y = \operatorname{arcctg} x$.
4. Перечислите обратные тригонометрические функции.

Упражнения

3.115°. Среди чисел -2, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, -1, 0, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{15}$, $\frac{3\pi}{5}$, π, $\sqrt{17}$ укажите те, которые могут быть значениями выражения:

1) $\operatorname{arctg} b$; 2) $\operatorname{arcctg} b$.

3.116°. Найдите значение выражения:

1) $\operatorname{arctg}(-x) + \arcsin(-x)$ при $x = 1$;
2) $\operatorname{arctg} x + \arcsin x$ при $x = -1$;
3) $\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arctg} x$ при $x = 0$;
4) $\arccos x - \operatorname{arcctg} x$ при $x = 0$.

3.117°. Укажите область определения и область (множество) значений функции f:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{x+2}$; 2) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{5-x}$;

3) $f(x) = \operatorname{arcctg}\left(4 - \frac{1}{4x^2}\right)$; 4) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2x} + 1\right)$;

5) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2 - 3}$; 6) $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x^2 - 1}$;

7) $f(x) = \operatorname{arcctg} \sqrt{x^4 - 16}$; 8) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{x^2 + 9}}$.

3.118. Оцените значения выражения:

1) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x - 3\pi$; 2) $6\operatorname{arctg} 3x + \frac{5\pi}{4}$;

3) $3\operatorname{arcctg} 3x + \frac{\pi}{4}$; 4) $\frac{3}{2}\operatorname{arcctg} 2x - \pi$;

5) $\frac{5\pi}{2} - 2\operatorname{arcctg} x$; 6) $3\pi - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

3.119. Укажите координаты точек пересечения с осями Ox и Oy графика функции:

1) $y = \operatorname{arcctg}\left(3x - \sqrt{3}\right)$; 2) $y = \operatorname{arctg}\left(4x - \sqrt{3}\right)$;

3) $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x - 3)$; 4) $y = \operatorname{arcctg}(x^2 + 3x + 2)$.

Адукацыйны партал www.adu.by

3.120°. Какому из числовых промежутков $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ принадлежит каждое из чисел $\operatorname{arctg} b$ и $\operatorname{arcctg} b$, если b равно:

1) -17; 2) -13; 3) $-\pi$; 4) $-\frac{7}{11}$;

5) 0,36; 6) 9,7; 7) 41; 8) $5\sqrt{37}$?

3.121. Расположите в порядке убывания числа:

1) $\operatorname{arctg} 200$; $\operatorname{arctg}(-10)$; $\operatorname{arctg} 0{,}3\pi$;
2) $\operatorname{arctg} 5\pi$; $\operatorname{arctg} 2{,}4$; $\operatorname{arctg}(-8)$;
3) $\operatorname{arcctg}(-88)$; $\operatorname{arcctg} 6{,}8$; $\operatorname{arcctg} 19\pi$;
4) $\operatorname{arcctg} 3\pi$; $\operatorname{arcctg}(-3)$; $\operatorname{arcctg}(-2{,}1)$.

3.122°. Установите, четной или нечетной является функция f:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x - 7\operatorname{arctg}(-x)$;
2) $f(x) = 2\operatorname{arctg} x - 2\operatorname{arctg} x^9$;
3) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x + 8\cos x$;
4) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 x + (-4\sin x)^4$;
5) $f(x) = \operatorname{arctg} x - 5x^5 \operatorname{arcctg}|x|$;
6) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}^2 x} - 6\operatorname{arcctg}|x|$.

3.123°. Функция задана формулой $y = f(x)$ на множестве D. Укажите для этой функции:

а) наименьшее значение; б) наибольшее значение; в) промежутки возрастания; г) промежутки убывания; д) промежутки знакопостоянства, где $y < 0$; е) промежутки знакопостоянства, где $y > 0$; ж) нули, если:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$;
2) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $D = \left[0; \sqrt{3}\right]$;
3) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $D = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$;
4) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$;
5) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$, $D = \left[-1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$;
6) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $D = \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; 1\right]$.

3.124. Используя изображения графиков функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ (см. рис. 159, 162), найдите приближенное (с точностью до 0,1) значение выражения:

1) $\operatorname{arcctg} 1{,}5$; 2) $\operatorname{arctg} 2{,}6$;
3) $\operatorname{arctg}(-0{,}8)$; 4) $\operatorname{arcctg}(-1{,}8)$.

3.125. Решите уравнение:

1) $\operatorname{arctg}(x^2 - 11x + 10) = 0$; 2) $\operatorname{arcctg}(x^2 + 14x + 12) = \frac{\pi}{2}$;
3) $\operatorname{arcctg}(16 - 2x - x^2) = \frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{arctg}(x^2 + 10x - 23) = \frac{\pi}{4}$;
5) $\operatorname{arctg}(x^2 + 8x + 11) = -\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arcctg}(13 - 9x + x^2) = \frac{3\pi}{4}$;
7) $\operatorname{arcctg}\left(\sqrt{3}x + 6\right) = \frac{5\pi}{6}$; 8) $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}x - 6\right) = -\frac{\pi}{6}$.

3.126. Используя изображения графиков функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ (см. рис. 159, 162), решите приближенно (с точностью до 0,1) уравнение:

1) $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{8}$; 2) $\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{8}$;
3) $\operatorname{arctg} x = -1{,}2$; 4) $\operatorname{arcctg} x = 2{,}4$;
5) $\operatorname{arcctg} x = 0{,}6$; 6) $\operatorname{arctg} x = 0{,}4$;
7) $\operatorname{arctg} x = 2$; 8) $\operatorname{arcctg} x = 4$.

Решите неравенство **(3.127—3.128)**.

3.127. 1) $\operatorname{arctg}(x + 2) \leqslant 0$; 2) $\operatorname{arcctg}(x + 5) < \pi$;
3) $\operatorname{arcctg}(6 - 2x) \leqslant \frac{\pi}{2}$; 4) $\operatorname{arctg}(1 - 2x) > -\frac{\pi}{2}$;
5) $\operatorname{arctg}(18 - 12x) \leqslant \frac{\pi}{2}$; 6) $\operatorname{arcctg}(4 + 4x) > \frac{\pi}{2}$.

3.128. 1) $\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{6}$; 2) $\operatorname{arcctg} x \leqslant \frac{\pi}{4}$;
3) $\operatorname{arcctg}(7x + 2) < \frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arctg}(7x + 8) \geqslant -\frac{\pi}{3}$;
5) $\operatorname{arctg}(3x - 1) > -\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arcctg}(2x - 5) \leqslant \frac{5\pi}{6}$.

3.129. При каких значениях p существуют такие значения x, при которых будет верным равенство:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{p - 0{,}1\pi}{p}$; 2) $\operatorname{arctg} x = \frac{p}{p + 4\pi}$;

Адукацыйны партал www.adu.by

3) $\operatorname{arcctg} x = \frac{p-3\pi}{p}$; 4) $\operatorname{arcctg} x = \frac{p}{p+5\pi}$;

5) $\operatorname{arctg}^2 x = p + \frac{\pi}{2}$; 6) $\operatorname{arcctg}^2 x = -p - \pi$?

Изобразите график функции (3.130—3.132).

3.130. 1) $y = -\operatorname{arctg} x$; 2) $y = -\operatorname{arcctg} x$;
3) $y = \operatorname{arcctg}(-x)$; 4) $y = \operatorname{arctg}(-x)$;
5) $y = 2\operatorname{arctg} x$; 6) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x$;
7) $y = \operatorname{arcctg} 3x$; 8) $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$;
9) $y = \operatorname{arctg}(x+1)$; 10) $y = \operatorname{arctg}(x-0{,}5)$.

3.131. 1) $y = \operatorname{arctg} x + 2$; 2) $y = \operatorname{arcctg}(x+1)$;
3) $y = 3\operatorname{arcctg}(2x-6) - 2$; 4) $y = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1{,}5$;
5) $y = -4\operatorname{arctg}(2x-4) + 1$; 6) $y = -2\operatorname{arcctg}\left(\frac{x}{2} + 1\right) + 3$.

3.132. 1) $y = \operatorname{arctg}|x|$; 2) $y = \operatorname{arcctg}|x|$;
3) $y = -\operatorname{arcctg}|x|$; 4) $y = -\operatorname{arctg}|x|$;
5) $y = |\operatorname{arcctg} x - 2|$; 6) $y = |\operatorname{arctg} x + 1|$.

3.10. Решение уравнений вида $\sin x = a$, $\cos x = a$

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений $\sin x = a$ и $\cos x = a$.

Случай 1. $|a| > 1$, т. е. $a < -1$ или $a > 1$.

При таких значениях a уравнения $\sin x = a$ и $\cos x = a$ не имеют решений (поясните почему).

Случай 2. $a = 0$; $|a| = 1$.

При таких значениях a получим уравнения, решения которых нам известны, — они указаны в таблице.

Уравнение \ Значение a	$a = 0$	$a = -1$	$a = 1$
$\sin x = a$	$x = \pi n,\ n \in Z$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$\cos x = a$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$	$x = 2\pi n,\ n \in Z$

Адукацыйны партал www.ada.by

Случай 3. $0 < |a| < 1$, т. е. $-1 < a < 0$ или $0 < a < 1$.

Пусть для определенности $0 < a < 1$. Найдем решения уравнения $\sin x = a$.

Способ 1 (с помощью тригонометрического круга).

На единичной окружности (рис. 165) есть две точки A_{α_1} и A_{α_2}, ординаты которых равны a — значению $\sin x$. Эти точки симметричны относительно оси Oy. Все решения уравнения $\sin x = a$ можно записать в виде:

$x = \alpha_1 + 2\pi k,\ k \in Z$, или
$x = \alpha_2 + 2\pi m,\ m \in Z$.

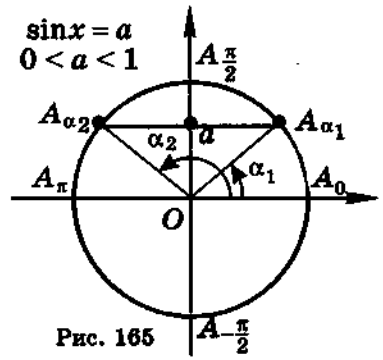


Рис. 165

Пусть $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\alpha_2 \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Поскольку $\alpha_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha_1 = a$, то (по определению арксинуса) $\alpha_1 = \arcsin a$.

Поскольку точка A_{α_2} симметрична точке A_{α_1} относительно оси Oy, то $\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \pi - \arcsin a$.

Таким образом, решениями уравнения $\sin x = a$ являются числа:

$$x = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z, \quad (1)$$
$$\text{или } x = \pi - \arcsin a + 2\pi m,\ m \in Z. \quad (2)$$

Можно было бы на этом и остановиться, но чаще всего эти две группы решений уравнения $\sin x = a$ записывают с помощью одной общей формулы

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z. \quad (3)$$

По формуле (3) при $n = 2k$, $k \in Z$, получим

$$x = (-1)^{2k} \arcsin a + \pi \cdot 2k,$$

т. е. решения уравнения из (1). При $n = 2m + 1$, $m \in Z$, получим

$$x = (-1)^{2m+1} \arcsin a + \pi(2m + 1),$$

т. е. решения из (2).

Способ 2 (с помощью графиков функций).

В одной системе координат изобразим графики функций $y = \sin x$ и $y = a$ (рис. 166). Решениями уравнения

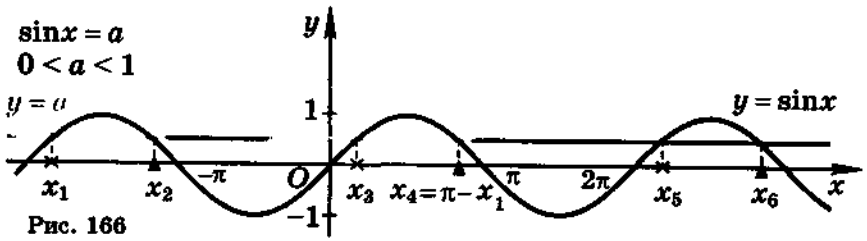


Рис. 166

$\sin x = a$ $(0 < a < 1)$ будут абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \sin x$ и $y = a$. Некоторые из них отмечены на рисунке 166 (это точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6).

Решения, отмеченные на рисунке крестиками, можно записать формулой (1) (поясните почему):

$$x = x_3 + 2\pi k = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Решения, отмеченные на рисунке треугольниками, можно записать формулой (2) (поясните почему):

$$x = x_4 + 2\pi m = \pi - \arcsin a + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Решения уравнения $\sin x = a$, записанные этими двумя формулами, объединяют в одну формулу (3) (см. способ 1).

Запись формулы решений уравнения $\sin x = a$ для случая $-1 < a < 0$ остается такой же — формулами (1) и (2) или формулой (3).

Пример 1. Решить уравнение

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. По формуле (3) получаем:

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. По формуле (3) получаем:

$$2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n,\ n \in Z;$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z.$$

Здесь решения выглядят проще, если их записать двумя формулами:

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \text{ при } n = 2k,\ k \in Z$$

и

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ при } n = 2k + 1,\ k \in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

Решим теперь при $0 < a < 1$ уравнение $\cos x = a$.

Способ 1 (с помощью тригонометрического круга).

На единичной окружности (рис. 167) есть две точки A_{α_1} и A_{α_2}, абсциссы которых равны a — значению $\cos x$. Эти точки симметричны относительно оси Ox. Все решения уравнения $\cos x = a$ можно записать в виде:

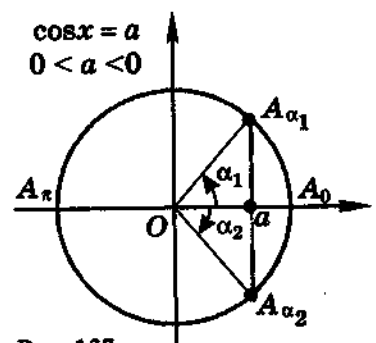


Рис. 167

$$x = \alpha_1 + 2\pi k,\ k \in Z, \text{ или } x = \alpha_2 + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Пусть $\alpha_1 \in [0; \pi]$, $\alpha_2 \in [-\pi; 0]$.

Поскольку $\alpha_1 \in [0; \pi]$ и $\cos\alpha_1 = a$, то (по определению арккосинуса) $\alpha_1 = \arccos a$.

Поскольку точка A_{α_2} симметрична точке A_{α_1} относительно оси Ox, то $\alpha_2 = -\alpha_1 = -\arccos a$.

Таким образом, решениями уравнения $\cos x = a$ являются числа:

$$x = \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z, \quad (4)$$

или

$$x = -\arccos a + 2\pi m,\ m \in Z. \quad (5)$$

Эти две группы решений обычно записывают одной формулой:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in Z. \quad (6)$$

Адукацыйны партал www.adu.by

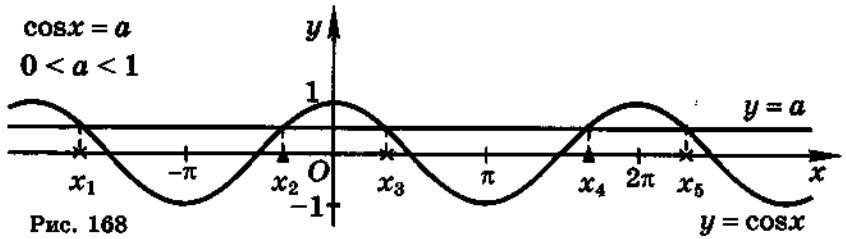


Рис. 168

Способ 2 (с помощью графиков функций).
В одной системе координат изобразим графики функций $y = \cos x$ и $y = a$ (рис. 168). Решениями уравнения $\cos x = a$ $(0 < a < 1)$ будут абсциссы точек пересечения графиков функций $y = \cos x$ и $y = a$. Некоторые из них отмечены на рисунке 168 (это точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5).

Решения, отмеченные на рисунке крестиками, можно записать формулой (4) (поясните почему):

$$x = x_3 + 2\pi k = \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Решения, отмеченные на рисунке треугольниками, можно записать формулой (5) (поясните почему):

$$x = x_2 + 2\pi m = -\arccos a + 2\pi m,\ m \in Z.$$

Решения уравнения $\cos x = a$, записанные этими двумя формулами, объединяют в одну формулу (6) (см. способ 1).

Запись формулы решений уравнения $\cos x = a$ для случая $-1 < a < 0$ остается такой же — формулами (4) и (5) или формулой (6).

Пример 3. Решить уравнение

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

на промежутке $[-3\pi;\ 2\pi]$.

Решение. По формуле (6) получим:

$$x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

При $n \in \{-1;\ 0;\ 1\}$ получим решения из промежутка $[-3\pi;\ 2\pi]$:

$$\pm\frac{\pi}{6} - 2\pi;\ \pm\frac{\pi}{6};\ -\frac{\pi}{6} + 2\pi.$$

Ответ: $-\frac{13\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{6};\ -\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Решение. По формуле (6) получим:

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z;\ x = \frac{\pi}{20} \pm \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{20} \pm \frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z$.

1. При каких значениях a уравнение $\sin x = a$ $(\cos x = a)$ не имеет решения? Почему?
2. Решите уравнение $\sin x = a$ $(\cos x = a)$ при: $a = -1$, $a = 0$, $a = 1$.
3. Проиллюстрируйте решение уравнения $\sin x = a$ $(\cos x = a)$ на тригонометрическом круге, если:
   а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -0{,}7$;
   г) $a = 1{,}3$; д) $a = -\frac{\pi}{2}$.
4. Проиллюстрируйте решение уравнения $\sin x = a$ $(\cos x = a)$ с помощью графиков функций, если:
   а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -0{,}7$;
   г) $a = 1{,}3$; д) $a = -\frac{\pi}{2}$.

Упражнения

3.133. Укажите на единичной окружности точки, соответствующие числам:

1) $(-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; 2) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi k,\ n \in Z$;

3) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$; 4) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$.

Решите уравнение (3.134—3.136).

3.134°. 1) $\sin x(\sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$; 2) $(\sin^2 x - 1)\cos^2 x = 0$;
3) $\cos x(\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$; 4) $(\cos^2 x - 1)\sin^2 x = 0$.

Адукацыйны партал www.adu.by

3.135°. 1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\sin 3x = -\frac{1}{2}$; 4) $\sin \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.136. 1) $\sin 5x = -\frac{1}{7}$; 2) $\sin \frac{x}{5} = \frac{5}{8}$;

3) $5\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 9$; 4) $3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -7$.

3.137. Решите уравнение из упражнения **3.136** на промежутке:

а) $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $[-\pi; 3\pi]$.

3.138°. Решите уравнение:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) $\cos 4x = -\frac{1}{2}$; 4) $\cos \frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

5) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.139. Решите уравнение из упражнения **3.138** на промежутке:

а) $\left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $[-2\pi; 3\pi]$.

3.140. Решите уравнение:

1) $\cos 7x = -\frac{1}{9}$; 2) $\cos \frac{2x}{7} = \frac{1}{8}$;

3) $5\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 13$; 4) $3\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\pi$.

3.141. Найдите наибольший отрицательный и наименьший положительный корни уравнения:

1) $2\sin(5x - 2) = 1$; 2) $2\cos(4x + 1) = -1$;

3) $2\cos(3x - 2) = \sqrt{2}$; 4) $2\sin(3x - 1) = -1$;

5) $\sqrt{2}\sin(4x + 1) = -1$; 6) $2\cos(3x - 2) = \sqrt{3}$;

7) $\sqrt{2}\cos(2x - 1) = -1$; 8) $2\sin(2x + 3) = -\sqrt{3}$.

3.142. Найдите корни уравнения, удовлетворяющие условию $a < x < b$:

1) $2\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$, если $a = 1$, $b = 4$;

2) $2\sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$, если $a = -3$, $b = 1$;

3) $\sqrt{2}\cos\left(2\pi x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$, если $a = 2$, $b = 4$;

4) $2\cos\left(2\pi x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} = 0$, если $a = -1$, $b = 2$.

3.143. Решите на промежутке I уравнение:

1) $4\sin x \cos x + \sqrt{3} = 0$, если $I = \left[-\frac{5\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $\sin^2 \frac{2x}{3} - \cos^2 \frac{2x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, если $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$;

3) $\cos 6x \cos 4x + \sin 6x \sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если $I = \left(-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$;

4) $\sin 5x \cos 2x - \cos 5x \sin 2x = -\frac{1}{2}$, если $I = \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$;

5) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, если $I = \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$;

6) $\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, если $I = \left[-\frac{9\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right)$.

3.144. Укажите какие-нибудь промежутки значений переменной x, на которых каждое из уравнений $\sin x = \frac{1}{7}$ и $\cos x = \frac{2}{7}$ имеет ровно по t корней, если:

1) $t = 3$; 2) $t = 2$; 3) $t = 1$; 4) $t = 4$.

3.145. На промежутке:

а) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$; в) $\left[-\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$;

г) $[-\pi; 2\pi]$; д) $[-2; 3]$; е) $[1; 5]$

укажите число корней уравнения:

1) $\sin x = -0{,}76$; 2) $\cos x = -0{,}23$.

Решите уравнение **(3.146—3.148)**.

3.146. 1) $2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0$;

2) $3\cos^2 x + 10\cos x + 3 = 0$;

3) $2\cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$;

4) $2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = 0$;

дукацыйны партал www.adu.by

5) $4\sin^2\left(2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)-2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\cos(2x-\pi)=4-\sqrt{15}$;

6) $2\cos^2\left(\frac{x}{2}-3\pi\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2}(6\pi+x)\right)=2-0{,}5\sqrt{10}$.

3.147*. 1) $\frac{\sin x}{\sqrt{\pi^2-x^2}}=0$; 2) $\frac{\sin x}{\sqrt{4\pi^2-x^2}}=0$;

3) $\sin 2x\sqrt{4-x^2}=0$; 4) $(1-\sin 3x)\sqrt{9-x^2}=0$;

5) $\left(\sin\frac{x}{2}+0{,}5\right)\sqrt{6+5x-x^2}=0$;

6) $\left(2\sin\frac{x}{3}+\sqrt{3}\right)\sqrt{8+7x-x^2}=0$.

3.148*. 1) $\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\sqrt{-\cos x}=0$; 2) $(2\sin x+1)\sqrt{-\cos x}=0$;

3) $\left(2\cos x+\sqrt{2}\right)\sqrt{-\sin x}=0$; 4) $\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)\sqrt{-\sin x}=0$.

3.149. 1) При каких значениях a уравнение $\sin x=a$ имеет наибольшее количество корней на промежутке $\left[\frac{\pi}{3};\frac{11\pi}{6}\right]$?

2) При каких значениях a уравнение $\cos x=a$ имеет наибольшее количество корней на промежутке $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{4\pi}{3}\right]$?

3.150. Решите уравнение относительно x:

1) $\sin x=\frac{1}{a}$; 2) $\cos x=\frac{1}{a}-1$;

3) $\cos x=a^2-1$; 4) $\sin x=a^2+1$;

5) $a\sin^2 x-\cos x=0$; 6) $a\cos^2 x+\sin x=0$;

7) $\sin(\arcsin x)=a^2-1$; 8) $\cos(\arccos x)=a^2+1$.

3.11. Решение уравнений вида $\operatorname{tg}x=a$, $\operatorname{ctg}x=a$

Рассмотрим решение простейших тригонометрических уравнений $\operatorname{tg}x=a$ и $\operatorname{ctg}x=a$.

Эти уравнения имеют решения при любом значении a, поскольку областью (множеством) значений функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ является $\boldsymbol{R}$.

Адукацыйны партал www.adu.by

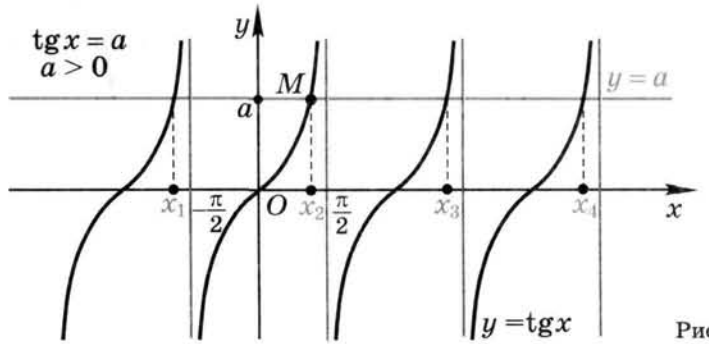


Рис. 169

Множества решений указанных уравнений при $a=0$ совпадают со множеством нулей соответствующих функций (см. п. 3.9, 3.10). Решениями уравнения $\operatorname{tg}x=0$ являются $x=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, а уравнения $\operatorname{ctg}x=0$ — $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Рассмотрим теперь решение уравнения $\operatorname{tg}x=a$ при $a\neq 0$ с помощью графиков функций.

Пусть для определенности $a>0$. Изобразив в одной системе координат тангенсоиду $y=\operatorname{tg}x$ и прямую $y=a$, отметим на оси Ox решения уравнения $\operatorname{tg}x=a$, они являются абсциссами точек пересечения тангенсоиды и прямой $y=a$ (рис. 169). На рисунке отмечены некоторые из них — x_1, x_2, x_3, x_4.

Расстояния между соседними решениями уравнения $\operatorname{tg}x=a$ одинаковы и равны π — наименьшему положительному периоду функции тангенс. Зная, что абсцисса точки M — число x_2, равное $\operatorname{arctg}a$ (объясните почему по рисунку 169), и используя периодичность функции тангенс, запишем все решения рассматриваемого уравнения в виде

$$x=\operatorname{arctg}a+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}. \qquad (1)$$

Решение уравнения $\operatorname{tg}x=a$ при $a<0$ этим же способом проиллюстрировано на рисунке 170. Формула (1) имеет место при любом значении a.

Пример 1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}.$$

Решение. По формуле (1) получаем:

$$x=\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};\ x=-\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

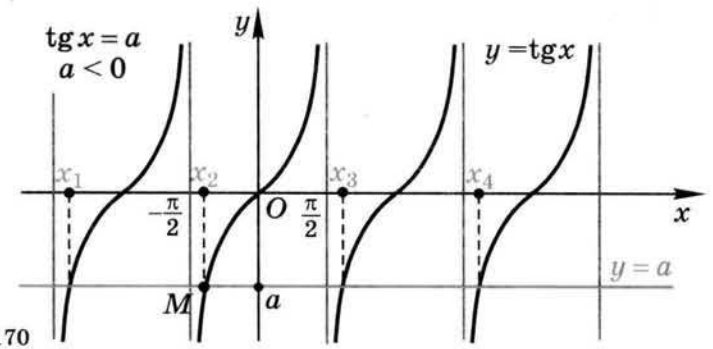


Рис. 170

$$x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Рассмотрим решение уравнения $\operatorname{ctg}x=a$ при $a\neq 0$.

Способ 1. При $a\neq 0$ уравнение $\operatorname{ctg}x=a$ равносильно уравнению $\frac{1}{\operatorname{tg}x}=a$, которое можно представить в виде $\operatorname{tg}x=\frac{1}{a}$.

По формуле (1) имеем

$$x=\operatorname{arctg}\frac{1}{a}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Способ 2. Решение уравнения $\operatorname{ctg}x=a$ с использованием графиков функций приводит к формуле

$$x=\operatorname{arcctg}a+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

Проведите необходимые рассуждения самостоятельно.

Пример 2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Решение. *Способ 1.* Данное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$.

По формуле (1) получаем

$$x=-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Способ 2. По формуле (2) получаем:

$$x=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

$$x=\pi-\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

$$x=\pi-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

$$x=\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

Поясните, почему формулы $x=-\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, и $x=\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, определяют одно и то же множество решений уравнения $\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{7\pi}{2}\right)=-\sqrt{3}.$$

Решение. Учитывая периодичность функции $y=\operatorname{ctg}u$, получаем:

$$\operatorname{ctg}\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sqrt{3};$$

↓ поскольку $\operatorname{ctg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}\alpha$, то имеем: ↓

$$-\operatorname{tg}3x=-\sqrt{3};\quad \operatorname{tg}3x=\sqrt{3};$$

$$3x=\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$$

$$x=\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}$.

1. При каких значениях a уравнение $\operatorname{tg}x=a$ ($\operatorname{ctg}x=a$) не имеет решений?
2. Решите уравнение $\operatorname{tg}x=a$ ($\operatorname{ctg}x=a$) и проиллюстрируйте его решение, используя график функции, при:
   а) $a>0$; б) $a<0$; в) $a=0$;
   г) $a=7$; д) $a=-5$.
3. Решите уравнение $\operatorname{tg}x=a$ ($\operatorname{ctg}x=a$) и проиллюстрируйте его решение с помощью тригонометрического круга и линии тангенсов (котангенсов) при разных значениях a (см. задание 2).
4. Как можно решать уравнение $\operatorname{ctg}x=a$?

Адукацыйны партал www.adu.by

Упражнения

3.151°. Укажите на единичной окружности точки, соответствующие числам:

1) $\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$; 2) $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ n\in Z$;

3) $-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 4) $\frac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z$.

Решите уравнение **(3.152—3.153)**.

3.152°. 1) $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}(5x-1)\operatorname{tg}(x+1)=0$;

2) $\operatorname{tg}^2x\operatorname{tg}(x-1)\operatorname{tg}(2+x)=0$;

3) $\operatorname{ctg}^2(4-8x)\operatorname{tg}^2(3-x)=0$;

4) $\operatorname{ctg}^2(6x-1)\operatorname{ctg}^2x=0$;

5) $\operatorname{ctg}2x(2+\sin 3x)=0$; 6) $\operatorname{ctg}3x(3+\cos 5x)=0$;

7) $\operatorname{tg}4x(-2-\cos 3x)=0$; 8) $\operatorname{tg}\frac{x}{3}(-4-\sin 2x)=0$.

3.153°. 1) $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg}3x=-1$;

4) $\operatorname{tg}\frac{x}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 5) $\operatorname{tg}4x=-1$; 6) $\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=-\sqrt{3}$;

7) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1$; 8) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

3.154. Решите уравнение из упражнения **3.153** на промежутке:

а) $\left(-\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right)$; б) $(-\pi;\ 4\pi)$.

3.155. Найдите наибольший отрицательный и наименьший положительный корни уравнения:

1) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(5x-2)=3$; 2) $3\operatorname{ctg}(3x-1)=-\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{ctg}(4x+1)=-1$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{tg}(2x+3)=-1$.

3.156. Найдите корни уравнения, удовлетворяющие условию $a<x<b$:

1) $3\operatorname{tg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$, если $a=1,\ b=4$;

2) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(2\pi x-\frac{\pi}{3}\right)-1=0$, если $a=-2,\ b=1$;

3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)+1=0$, если $a=-2,\ b=3$;

4) $3\operatorname{ctg}\left(3\pi x-\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{3}=0$, если $a=-1,\ b=1$.

3.157. Решите уравнение на промежутке I:

1) $\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+\sqrt{3}=0$, если $I=\left(-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\frac{1-\operatorname{ctg}^2x}{2\operatorname{ctg}x}-\frac{\sqrt{3}}{3}=0$, если $I=\left(-\frac{3\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $\frac{\operatorname{ctg}5x\operatorname{ctg}8x+1}{\operatorname{ctg}5x-\operatorname{ctg}8x}+1=0$, если $I=\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}\right)$;

4) $\frac{\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}5x}{1+\operatorname{tg}3x\operatorname{tg}5x}=1$, если $I=\left(-\frac{\pi}{6};\ \frac{11\pi}{6}\right)$;

5) $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-4x\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, если $I=\left(-\frac{7\pi}{6};\ \frac{7\pi}{6}\right]$;

6) $\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)}=-\sqrt{3}$, если $I=\left[-\frac{17\pi}{12};\ \frac{19\pi}{12}\right)$.

3.158. Укажите какие-нибудь промежутки значений переменной x, на которых каждое из уравнений а) $\operatorname{tg}x=-\frac{4}{5}$ и б) $\operatorname{ctg}x=-4$ имеет ровно по m корней, если:

1) $m=4$; 2) $m=1$; 3) $m=2$; 4) $m=3$.

3.159. На каждом из промежутков:

а) $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; в) $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

г) $[\pi;\ 2\pi]$; д) $[-2;\ 3]$; е) $[1;\ 5]$

укажите число корней уравнения:

1) $\operatorname{tg}x=13{,}2$; 2) $\operatorname{ctg}x=8{,}3$.

Решите уравнение **(3.160—3.161)**.

3.160. 1) $\operatorname{tg}^2\frac{x}{10\,000}=10\,000$;

2) $\operatorname{ctg}^2\frac{x}{1\,000\,000}=1\,000\,000$;

дукацыйны партал

3) $\operatorname{ctg}^3\frac{x}{1\,000\,000}=1\,000\,000$; 4) $\operatorname{tg}^3\frac{x}{1000}=1000$;

5) $3\operatorname{tg}^2x-1=0$; 6) $1-3\operatorname{ctg}^2x=0$;

7) $2\operatorname{ctg}^2x+3\operatorname{ctg}x-2=0$; 8) $2\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}x-6=0$.

3.161. 1) $\frac{\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1}=0$; 2) $\frac{\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1}=0$;

3) $\frac{2\operatorname{ctg}x-2}{4\operatorname{ctg}^2x-3\operatorname{ctg}x}-\operatorname{tg}x=1+\frac{2}{4-3\operatorname{tg}x}$;

4) $\frac{12\operatorname{tg}x-2}{6\operatorname{tg}^2x-\operatorname{tg}x}-\operatorname{ctg}x=1+\frac{6}{6-\operatorname{ctg}x}$.

3.162*. 1) При каких значениях a уравнение $\operatorname{ctg}^4x-(a+2)\operatorname{ctg}^2x-(a+3)=0$ имеет решение?

2) При каких значениях a уравнение $\operatorname{tg}^4x-(a+1)\operatorname{tg}^2x-(a+2)=0$ имеет решение?

3.163*. Решите относительно x уравнение:

1) $\frac{\operatorname{tg}x-a}{a}=\frac{2a}{\operatorname{tg}x-a}$; 2) $\frac{a}{\operatorname{tg}x}+\frac{a-1}{\operatorname{tg}x-1}=2$;

3) $\left|\operatorname{tg}x+\frac{1}{\operatorname{tg}x}-3\right|=a-3$; 4) $\left|\operatorname{tg}x+\frac{3}{\operatorname{tg}x}-2\right|=a-1$.

3.12. Тригонометрические уравнения

Решение разнообразных тригонометрических уравнений с помощью преобразований тригонометрических выражений сводится к решению простейших уравнений.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение:

а) $(3\cos x+6)(2\sin 3x-2)=0$; б) $\sin 6x=\sin 3x$.

Решение. а) Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, а остальные при этом имеют смысл. Данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$3\cos x+6=0 \qquad (1)$$

или

$$2\sin 3x-2=0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) решений не имеет (поясните почему).

Из уравнения (2) получим:

$$\sin 3x=1;$$

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z.$$

б) Уравнение $\sin 6x-\sin 3x=0$, используя формулу синуса двойного аргумента, приведем к виду

$$2\sin 3x\cos 3x-\sin 3x=0.$$

Решая его, получаем:

$$\sin 3x\,(2\cos 3x-1)=0;$$

$$\sin 3x=0 \text{ или } \cos 3x=\frac{1}{2};$$

$$x=\frac{\pi n}{3},\ n\in Z, \text{ или } x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$; б) $\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$; $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{3}$, $k\in Z$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos 6x-4\cos 7x\cos 4x=3-2\cos 11x.$$

Решение. Используя формулы

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)) \text{ и } 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},$$

получаем:

$$2\cos^2 3x-2(\cos 11x+\cos 3x)=4-2\cos 11x;$$

$$\cos^2 3x-\cos 3x-2=0.$$

Пусть $\cos 3x=y$, тогда:

$$y^2-y-2=0, \text{ откуда } y_1=-1,\ y_2=2.$$

Итак,

$$\cos 3x=-1 \text{ или } \cos 3x=2.$$

Второе уравнение решений не имеет, а из первого уравнения получим

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3},\ k\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}(1+2k)$, $k\in Z$.

дукацыйны партал

Пример 3. Решить уравнение

$$2-\cos x=3\sin\frac{x}{2}.$$

Решение. Заменим данное уравнение равносильным и решим его:

$$1-\cos x-3\sin\frac{x}{2}+1=0;$$

$$\downarrow \text{ применим формулу } 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2} \downarrow$$

$$2\sin^2\frac{x}{2}-3\sin\frac{x}{2}+1=0.$$

Пусть $\sin\frac{x}{2}=y$, тогда:

$$2y^2-3y+1=0,$$

откуда

$$y_1=\frac{1}{2},\ y_2=1.$$

Итак, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \qquad (3)$$

или

$$\sin\frac{x}{2}=1. \qquad (4)$$

Решая уравнение (3), получаем

$$x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z.$$

Решая уравнение (4), получаем

$$x=\pi+4\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in Z;\ \pi+4\pi n,\ n\in Z.$

Пример 4. Решить уравнение

$$7\sin x-5\cos x=0.$$

Решение. Если x — решение этого уравнения, то $\sin x\neq 0$ и $\cos x\neq 0$ (поясните почему).

Поэтому, разделив обе части уравнения на $\cos x$, получим равносильное ему уравнение $7\operatorname{tg}x-5=0$, откуда $\operatorname{tg}x=\frac{5}{7}$, т. е. $x=\operatorname{arctg}\frac{5}{7}+\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5}{7}+\pi n,\ n\in Z.$

Пример 5. Решить уравнение

$$2\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x=3.$$

Решение. Из условия следует, что $x\neq\frac{\pi m}{2},\ m\in Z$ (поясните почему). Умножив данное уравнение на $\operatorname{tg}x$, получим $\left(\text{при } x\neq\frac{\pi m}{2}\right)$ равносильное ему уравнение

$$2\operatorname{tg}^2x-2=3\operatorname{tg}x.$$

Решив последнее уравнение, получим:

$$\operatorname{tg}x=-\frac{1}{2} \text{ или } \operatorname{tg}x=2;$$

$$x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z \text{ или } x=\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in Z;\ \operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z.$

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin^2x-5\sin x\cos x+6\cos^2x=0. \qquad (5)$$

Решение. Если x — решение этого уравнения, то $\cos x\neq 0$ (объясните почему).

Разделив обе части уравнения (5) на $\cos^2x$, получим равносильное ему уравнение

$$\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-\frac{5\sin x\cos x}{\cos^2x}+\frac{6\cos^2x}{\cos^2x}=0,\ \text{т. е. } \operatorname{tg}^2x-5\operatorname{tg}x+6=0.$$

Откуда находим:

$$\operatorname{tg}x=2 \text{ или } \operatorname{tg}x=3;$$

$$x=\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z, \text{ или } x=\operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n\in Z;\ \operatorname{arctg}3+\pi k,\ k\in Z.$

Пример 7. Решить уравнение

$$7\sin^2x-5\sin x\cos x=6.$$

Решение. Используя основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$7\sin^2x-5\sin x\cos x=6(\sin^2x+\cos^2x);$$

$$\sin^2x-5\sin x\cos x-6\cos^2x=0.$$

Полученое уравнение решается аналогично примеру 6 (убедитесь в этом самостоятельно).

Ответ: $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;\ \operatorname{arctg}6+\pi n,\ n\in Z.$

дукацыйны партал www.adu.by

▲ Уравнения вида (5) называются *однородными уравнениями* второй степени относительно выражений $\sin x$ и $\cos x$.

Приведем примеры тригонометрических однородных уравнений других степеней. Так, уравнение

$$3\sin 2x - 8\cos 2x = 0$$

является однородным уравнением первой степени относительно выражений $\sin 2x$ и $\cos 2x$; однородное уравнение первой степени относительно выражений $\sin x$ и $\cos x$ было решено в примере 4. Уравнение

$$\sin^4 x - 3\sin^3 x\cos x + 5\sin^2 x\cos^2 x + 13\cos^4 x = 0$$

является однородным уравнением четвертой степени относительно выражений $\sin x$ и $\cos x$, а уравнение

$$\sin^5 5x\cos^2 5x + 9\sin 5x\cos^6 5x - \sin^7 5x + 3\cos^7 5x = 0$$

является однородным уравнением седьмой степени относительно выражений $\sin 5x$ и $\cos 5x$.

Однородные уравнения бывают не только тригонометрическими. Например, уравнение $2x^3 - 4x^2y + 3xy^2 - 5y^3 = 0$ — однородное уравнение третьей степени относительно переменных x и y. ▲

1. Поясните, как решать уравнение:
   а) $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\cos 2x + 1)\operatorname{tg} x = 0$;
   б) $\sin 7x + \sin 3x = 0$.
2. Поясните, как решать уравнение:
   а) $a\cos^2 5x + b\cos 5x + c = 0$;
   б) $a\sin x + b\cos x = 0$;
   в) $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$.

Упражнения

Решите уравнение **(3.164—3.169).**

3.164°. 1) $\sin 2x - \cos x = 0$; 2) $\cos 4x + \sin 8x = 0$;

3) $2\sin\frac{x}{2} = 3\sin^2\frac{x}{2}$; 4) $5\sin\frac{7x}{2} = 8\sin^2\frac{7x}{2}$;

5) $\cos^2 3x - \cos 3x\cos 5x = 0$;

6) $\cos^2\frac{5x}{5} - \cos\frac{5x}{3}\cos\frac{4x}{3} = 0$;

7) $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 2x$;

8) $\sqrt{3}\cos^2 4x - \sqrt{3}\sin^2 4x = 2\cos^2 8x$.

3.165. 1) $6\cos(2x+6) + 16\sqrt{3}\sin(x+3) - 21 = 0$;

2) $\cos(6x-8) - 3\sqrt{2}\cos(3x-4) + 3 = 0$;

3) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2x}{3}\right) = 3 + 7\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{3}\right)$;

4) $\cos\left(\frac{4\pi}{5} - x\right) = 11\sin\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{2}\right) - 5$.

3.166. 1) $3\cos\frac{x}{2} + 20\cos\frac{x}{4} + 9 = 0$; 2) $\cos\frac{x}{3} - 10\sin\frac{x}{6} = 5$;

3) $\cos\frac{4x}{3} - 5\sin\frac{2x}{3} + 1 = 0$; 4) $\cos\frac{8x}{5} - 3\cos\frac{4x}{5} + 2 = 0$.

3.167. 1) $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$;

2) $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}$;

3) $\operatorname{tg}(2(x+\pi)+4) = 5\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$;

4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi - x}{2} + 2\operatorname{ctg}\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = 1$.

3.168. 1) $3 + 2\operatorname{tg}^2 5x - \frac{3}{\cos 5x} = 0$;

2) $\operatorname{tg}^2 2x - \frac{1}{\cos 2x} = 5$;

3) $2 - 4\operatorname{tg} 0{,}1x + \frac{1}{\cos^2 0{,}1x} = 0$;

4) $4 - 6\operatorname{tg} 0{,}5x + \frac{1}{\cos^2 0{,}5x} = 0$.

3.169. 1) $\sin 2x = \operatorname{tg} 2x$; 2) $\operatorname{ctg} 1{,}5x = \cos 1{,}5x$;

3) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{7\pi}{3} + x\right)}{\cos\frac{\pi}{3}\cos x}$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{9\pi}{4} - x\right)}{\sin\frac{\pi}{6}\sin x}$.

3.170. Сколько корней на промежутке $[-4; -2]$ имеет уравнение:

1) $\sin x = 2\sin^3 x - \cos 2x$; 2) $2\cos^3 2x = \cos 2x + \cos 4x$;

3) $\sin 2x + 2\sin x = 1 + \cos x$; 4) $\sin x - 2\cos\frac{x}{2} = \sin\frac{x}{2} - 1$?

дукацыйны партал

3.171. Найдите наименьший положительный корень уравнения:

1) $2\cos 2x + 8\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2} = 3$;

2) $6\cos 2x - 8\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3 = 0$.

Решите уравнение **(3.172—3.175)**.

3.172°. 1) $\sin x + \cos x = 0$; 2) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

3) $2\sin x - 3\cos x = 0$; 4) $\frac{1}{2}\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$;

5) $3\sin x + 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 0$; 6) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5\cos x = 0$.

3.173. 1)° $\sin^2 x + 14\sin x\cos x - 15\cos^2 x = 0$;

2)° $\cos^2 x - 12\sin x\cos x - 13\sin^2 x = 0$;

3) $2\cos^2 x - \sin 2x + 4\sin^2 x = 2$;

4) $6 - 10\cos^2 x + 4\cos 2x = \sin 2x$;

5) $4\sin 2x = 3\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 4\sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$;

6) $1{,}5\sin 2x = 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 9\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

3.174*. 1) $\sqrt{1 + 2\sin 4x\cos x} - \sqrt{\sin 3x} = 0$;

2) $\sqrt{1 - 2\sin 3x\sin 7x} - \sqrt{\cos 10x} = 0$;

3) $3\sqrt{\cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right)} - \sqrt{1 + \cos\frac{x}{4}} = \sqrt{2}$;

4) $\sqrt{1 - \cos\frac{x}{2}} + \sqrt{\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}$.

3.175*. 1) $|\cos x - \sin x| = 1 + 2\sin 2x$;

2) $|\cos x + \sin x| = 1 + 2\sin 2x$;

3) $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x$;

4) $1 - 2|\cos x| = 2\cos 2x - \sqrt{3}$;

5) $\left|\cos^2\frac{x}{2} - \frac{2}{5}\right| = 5\cos x + 1$;

6) $\left|1 - 5\sin\frac{x}{4}\right| = 3 - \cos\frac{x}{2}$.

3.176*. Решите уравнение относительно x:

1) $a\sin^2 x - \sin x = 0$; 2) $a\cos^2 x + \cos x = 0$;

3) $a\sin^2 x - \cos x = 0$; 4) $a\cos^2 x + \sin x = 0$.

Решите уравнение **(3.177—3.181)**.

3.177. 1) $\sin 7x - \sin 3x = \cos 5x$;

2) $\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$;

3) $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x - \sin 7x = 0$;

4) $\cos 6x - \cos 4x + \cos 7x - \cos 3x = 0$.

3.178. 1) $\frac{\sin 4x + \sin 8x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2} = \frac{\sin 6x + \sin 10x}{2x^2 - 5\pi x + 2\pi^2}$;

2) $\frac{\cos 5x + \cos 7x}{12x^2 - 73\pi x + 6\pi^2} = \frac{\cos 10x + \cos 2x}{12x^2 - 73\pi x + 6\pi^2}$.

3.179. 1) $\sin^3 4x - \sin^2 4x = \sin^2 4x\cos^2 4x$;

2) $6\sin^2 5x\cos^2 5x - 5\sin^3 5x + 5\sin^2 5x = 0$;

3) $\sin 2x\cos 2x - \sin x\cos x = 0$;

4) $\sin 4x\cos 8x - \sqrt{2}\sin 2x\cos 2x = 0$.

3.180. 1) $\sin x\cos 3x - 1 = \sin x - \cos 3x$;

2) $\sin 4x\cos 2x + 1 + \cos 2x + \sin 4x = 0$;

3) $\cos 8x\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 4x + \cos 8x + \frac{1}{2} = 0$;

4) $\sin 6x\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 3x - \sin 6x = -\frac{1}{2}$;

5) $10\sin 9x\sin 5x - 3\cos 8x - 5\sin 14x = 4$;

6) $8\sin 2x\sin 5x - 5\cos 6x + 8\cos 17x = 3$.

3.181. 1) $(\cos 2x + 2)(\sin 2x + 1)\sqrt{\sin x} = 0$;

2) $(\cos 3x - 2)(\sin 3x - 1)\sqrt{\cos x} = 0$;

3) $\sqrt{\sin x}(\sin 4x - 2)(\cos 4x + 1) = 0$;

4) $\sqrt{\cos x}(\sin 2x + 2)(\cos 2x - 1) = 0$;

5) $\sqrt{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} 4x + 1)(\operatorname{ctg} 4x + 1) = 0$;

6) $(\operatorname{tg} 2x - 1)(\operatorname{ctg} 2x + 1)\sqrt{\operatorname{ctg} 2x} = 0$.

дукацыйны партал

▲ 3.13. Тригонометрические уравнения (продолжение)

Существует много приемов решения тригонометрических уравнений. Покажем некоторые из них.

1. Разложение на множители

Пример 1. Решить уравнение:

а) $\cos 15x = -2\cos 5x$;

б) $\sqrt{\cos x}(\sin x - 2)(\cos x + 1) = 0$.

Решение. а) Данное уравнение равносильно уравнению $\cos 15x + \cos 5x + \cos 5x = 0$, решая которое получаем:

$$2\cos 10x \cos 5x + \cos 5x = 0;$$

$$2\cos 5x\left(\cos 10x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\cos 5x = 0 \text{ или } \cos 10x = -\frac{1}{2};$$

$$5x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \text{ или } 10x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{10},\ k \in Z, \text{ или } x = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi(1+k)}{10},\ k \in Z;\ \pm\frac{\pi(1+3n)}{15},\ n \in Z.$

б) Данное уравнение равносильно тому, что:

$$\sqrt{\cos x} = 0 \qquad (1)$$

или

$$\sin x - 2 = 0 \text{ и } \cos x \geqslant 0 \qquad (2)$$

или

$$\cos x + 1 = 0 \text{ и } \cos x \geqslant 0. \qquad (3)$$

В случаях (2) и (3) решений нет (поясните почему), а из уравнения (1) получим:

$$\cos x = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x.$$

Решение. Из формулы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ следует, что $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. Используя это следствие для данного уравнения, получаем:

$$\operatorname{tg}(x+2x)(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x) = \operatorname{tg} 3x;$$

$$\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = 0.$$

Функция $f(x) = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x$ периодическая с периодом π (убедитесь в этом). Ее нули в промежутке $[0; \pi]$ — это те значения x, при которых один из множителей равен нулю, а остальные имеют смысл. Значения x, при которых один из множителей равен нулю, это: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ (поясните почему). При всех значениях x, кроме $\frac{\pi}{2}$, все множители имеют смысл (поясните почему). Следовательно, $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ — нули функции f в промежутке $[0; \pi]$. Учитывая периодичность, получаем

$$x = \frac{\pi}{3} \cdot n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi n}{3},\ n \in Z.$

*2. Использование формул двойного и половинного аргумента**

Пример 3. Решить уравнение $2\sin x - 3\cos x = 3$.

Решение. Используя формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, получаем:

$$2 \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 3\sin^2\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2};$$

$$3\cos^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0; \quad \cos\frac{x}{2}\left(3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\right) = 0.$$

Откуда имеем

$$\cos\frac{x}{2} = 0 \qquad (4)$$

или

$$3\cos\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0. \qquad (5)$$

* В главе 2 нами были введены различные тригонометрические формулы (двойного угла, половинного угла). В главе 3, где рассматриваются тригонометрические функции числового аргумента, для названия уже знакомых формул естественно употреблять вместо слова «угол» слово «аргумент».

дукацыйны партал

Решениями уравнения (4) являются числа $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

А решениями уравнения (5) (однородного уравнения первой степени относительно выражений $\sin x$ и $\cos x$, которое сводится к уравнению $3-2\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$) являются числа

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi k,\ k\in Z \text{ (убедитесь в этом).}$$

Ответ: $\pi+2\pi n,\ n\in Z;\ 2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi k,\ k\in Z$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\cos^2 x+3\cos^2\frac{x}{2}=\frac{5}{2}.$$

Решение. Используем формулу половинного аргумента (еще говорят «формулу понижения степени»):

$$\cos^2 x+3\frac{1+\cos x}{2}=\frac{5}{2};$$

$$2\cos^2 x+3\cos x-2=0;$$

$$\cos x=-2 \text{ или } \cos x=\frac{1}{2}.$$

Первое уравнение не имеет решений, а решениями второго являются значения $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sin^2 x-\cos 2x=1{,}5-\sin 2x.$$

Решение. Используя формулы двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, получаем уравнение, равносильное данному:

$$\sin^2 x-(\cos^2 x-\sin^2 x)=1{,}5\,(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin x\cos x.$$

Решив это однородное уравнение второй степени относительно выражений $\sin x$ и $\cos x$, получим:

$$x=-\operatorname{arctg}5+\pi k,\ k\in Z,\ \text{ или }\ x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $-\operatorname{arctg}5+\pi k,\ k\in Z;\ \frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$.

3. Использование универсальной подстановки

Пример 6. Решить уравнение

$$\cos 4x+\operatorname{tg}2x=1. \qquad (6)$$

Решение. По условию $x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$ (область определения функции $y=\operatorname{tg}2x$). Использовав формулу $\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, получим уравнение, равносильное уравнению (6) (поясните почему):

$$\frac{1-\operatorname{tg}^2 2x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}+\operatorname{tg}2x=1.$$

Пусть $\operatorname{tg}2x=u$, тогда имеем:

$$\frac{1-u^2}{1+u^2}+u-1=0;$$

$$(1-u)\frac{u(1-u)}{1+u^2}=0;$$

$$u=1 \text{ или } u=0.$$

Учитывая обозначение, получаем:

$$\operatorname{tg}2x=1 \text{ или } \operatorname{tg}2x=0,$$

откуда находим:

$$x_1=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;\ x_2=\frac{\pi m}{2},\ m\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z;\ \frac{\pi m}{2},\ m\in Z$.

4. Введение вспомогательного угла (аргумента)

Пример 7. Решить уравнение:

а) $\sin x-\sqrt{3}\cos x=2$; б) $2\sin x-3\cos x=3$.

Решение. а) Преобразуем левую часть уравнения, используя введение вспомогательного аргумента (см. п. 2.15):

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=$$

$$\downarrow \quad \text{обозначим: } \frac{1}{2}=\cos\varphi,\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\varphi, \quad \downarrow$$

$$\text{т. е. } \varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$=2\,(\cos\varphi\sin x-\sin\varphi\cos x)=2\sin(x-\varphi)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1.$$

дукацыйны партал

Решив его, получим

$$x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z.$$

б) Преобразуем левую часть данного уравнения, используя введение вспомогательного угла, получим:

$$2\sin x-3\cos x=\sqrt{2^2+3^2}\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\sin x-\frac{3}{\sqrt{13}}\cos x\right)=$$

$$=\sqrt{13}\,(\cos\varphi\sin x-\sin\varphi\cos x)=\sqrt{13}\sin(x-\varphi),\ \text{где}\ \varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению

$$\sqrt{13}\sin(x-\varphi)=3,\ \text{где}\ \varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Решая его, получаем уравнение, равносильное данному:

$$\sin(x-\varphi)=\frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Решив его, находим

$$x=\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\,(1+(-1)^k)+\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z$; б) $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}\,(1+(-1)^k)+\pi k,\ k\in Z$.

Если решать уравнение б) с использованием универсальных подстановок, то заменив в данном уравнении выражения $\sin x$ и $\cos x$ универсальными подстановками при $x\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z$, получим уравнение

$$2\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-3\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=3.$$

Решая его, находим уравнение, равносильное данному:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{3}{2},$$

т. е.

$$x=2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi n,\ n\in Z.$$

Подставим теперь в исходное уравнение исключенные при использовании универсальных подстановок значения $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$:

$$2\sin(\pi+2\pi k)-3\cos(\pi+2\pi k)=3.$$

Получили $2\cdot0-3\,(-1)=3$, т. е. $3=3$ — верное числовое равенство.

Итак, значения $x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$, также являются решениями уравнения б).

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+2\pi n,\ n\in Z;\ \pi+2\pi k,\ k\in Z$.

Для уравнений вида $a\sin x+b\cos x=c$ существует более десяти различных способов решения (попробуйте их найти), среди которых самым рациональным является введение вспомогательного угла. Многие тригонометрические уравнения, в том числе и уравнения такого вида, можно свести к решению систем уравнений.

Пусть $\sin x=u$, а $\cos x=v$, тогда данное уравнение можно записать в виде $au+bv=c$. Поскольку $\sin^2x+\cos^2x=1$, то имеем еще одно уравнение $u^2+v^2=1$. Итак, решение уравнения $a\sin x+b\cos x=c$ $(c\neq0)$ сводится к решению системы уравнений $\begin{cases}au+bv=c\ (c\neq0),\\u^2+v^2=1.\end{cases}$

Применяя этот способ к решению уравнения б), получим:

$$\begin{cases}2u-3v=3,\\u^2+v^2=1.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$u_1=0,\ v_1=-1;$$

$$u_2=\frac{12}{13},\ v_2=-\frac{5}{13}.$$

Учитывая обозначения, имеем совокупность двух систем уравнений, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases}\sin x=0,\\\cos x=-1\end{cases}\ \text{или}\ \begin{cases}\sin x=\frac{12}{13},\\\cos x=-\frac{5}{13}.\end{cases}$$

Для первой системы получим:

$$\begin{cases}x=\pi k,\ k\in Z,\\x=\pi+2\pi n,\ n\in Z,\end{cases}$$

т. е.

$$x=\pi+2\pi n,\ n\in Z.$$

дукацыйны партал www.adu.by

Во второй системе $\sin x = \frac{12}{13} > 0$, а $\cos x = -\frac{5}{13} < 0$, поэтому одно из значений x принадлежит промежутку $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Таким образом, все решения этой системы можно записать в виде

$$x = \arccos\left(-\frac{5}{13}\right) + 2\pi k,\ k \in Z,$$

т. е.

$$x = \pi - \arccos\frac{5}{13} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Ответ: $\pi + 2\pi n,\ n \in Z;\ -\arccos\frac{5}{13} + \pi + 2\pi k,\ k \in Z.$

5. Использование свойств функций

Пример 8. Решить уравнение

$$1 + 2\operatorname{ctg}^2 x = \cos 8x. \qquad (7)$$

Решение. Поскольку при любых значениях из области определения уравнения (7) верны неравенства $1 + 2\operatorname{ctg}^2 x \geqslant 1$ и $\cos 8x \leqslant 1$, то равенство (7) возможно, лишь когда

$$\begin{cases} 1 + 2\operatorname{ctg}^2 x = 1, \\ \cos 8x = 1. \end{cases}$$

Решив первое уравнение этой системы, получим $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$. Подставив полученное решение во второе уравнение системы, имеем $\cos\left(8\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)\right) = 1$ — верное числовое равенство.

Значит, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ — решение системы и, следовательно, исходного уравнения.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

Пример 9. Решить уравнение $7\sin^4 x + 3\cos^{12} 2x = 10$.

Решение. Уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin^4 x = 1, \\ \cos^{12} 2x = 1. \end{cases}$$

Решим первое уравнение этой системы:

$$\sin^4 x = 1;\ \sin x = -1 \text{ или } \sin x = 1;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$$

Подставив эти значения x во второе уравнение системы, получим

$$\cos^{12} 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 1,\ n \in Z,$$

т. е. $\cos^{12}(\pi + 2\pi) = 1$ — верное числовое равенство.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z.$

Пример 10. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16} = 0$$

на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Пусть $f(x) = \operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16} = 0$ — функция с областью определения $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Надо найти ее нули.

Функция $f(x)$ является четной, поскольку

$$f(-x) = \operatorname{tg}^8(-x) + \sin^8(-x) - \frac{17}{16} = \operatorname{tg}^8 x + \sin^8 x - \frac{17}{16} = f(x).$$

На промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функции $y = \operatorname{tg}^8 x$ и $y = \sin^8 x$ являются возрастающими (объясните почему). Значит, является возрастающей и функция $y = f(x)$.

Легко убедиться, что $x = \frac{\pi}{4}$ является нулем функции f:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}^8\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^8\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{17}{16} = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^8 - \frac{17}{16} = \frac{2^4}{2^8} - \frac{1}{16} = 0.$$

Других нулей на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ функция f не имеет (поясните почему).

Поскольку f — четная функция, то

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}$.

Пример 11. Решить уравнение

$$7\operatorname{ctg}^{47} x - 3 = 4\operatorname{tg}^{13} x$$

на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Легко убедиться, что $x = \frac{\pi}{4}$ является решением данного уравнения на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом про-

дукацыйны партал

межутке функция $f(x)=7\operatorname{ctg}^{47}x-3$ убывающая (это следует из убывания на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ функций $y=\operatorname{ctg}x$ и $y=\operatorname{ctg}^{47}x$), а функция $g(x)=4\operatorname{tg}^{13}x$ — возрастающая (это следует из возрастания на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{tg}^{13}x$).

Таким образом, на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $x=\frac{\pi}{4}$ — единственное решение.

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Упражнения

Решите уравнение **(3.182—3.195)**.

3.182. 1) $\sin 18x-2\sin 6x=0$; 2) $\sin 21x+2\sin 7x=0$;
3) $2\cos 3x+\cos 9x=0$; 4) $2\cos 4x-\cos 12x=0$.

3.183. 1) $\sin\frac{3x}{2}+2\cos x=2$; 2) $\cos\frac{9x}{2}+2\cos 3x=-2$;
3) $0{,}5(\sin 3x-\sin x)=\sin 2x\cos x-4\sin^3 x$;
4) $0{,}5(\cos 3x-\cos x)=2\sin^2 x\cos x+4\cos^3 x$;
5) $\cos^3 x\cos 3x+\sin^3 x\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{4}$;
6) $\sin^3 x\cos 3x+\cos^3 x\sin 3x=-\frac{3}{8}$;
7) $\sin^3 x\sin 3x+\cos^3 x\cos 3x=\cos^3 4x$;
8) $4\sin^3 x\cos 3x+4\cos^3 x\sin 3x=3\sin 2x$.

3.184. 1) $5\sin x-12\cos x=13$; 2) $8\sin x-15\cos x=17$;
3) $\sqrt{3}\sin 2x-2\cos 2x=1$; 4) $\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=-1$;
5) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}$; 6) $\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}$;
7) $2\sin\frac{x}{4}+\sqrt{2}\cos\frac{x}{4}=\sqrt{6}$; 8) $\sin\frac{x}{4}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{4}=-\sqrt{3}$.

3.185. 1) $\cos 2x=\sqrt{2}(\cos x-\sin x)$;
2) $\cos 2x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$;
3) $\sin 2x=\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}$;
4) $4\sin 5x\cos 5x(\cos^4 x-\sin^4 x)=\sin 4x$;

5) $\sin 10x+\cos 10x=\sqrt{2}\cos 15x$;
6) $\sqrt{2}\sin 18x-\sin 12x+\cos 12x=0$;
7) $2\sin^4 2x-3+3\sin 4x=2\cos^4 2x$;
8) $2\cos^4\frac{x}{2}+\sqrt{15}-4\sin x=2\sin^4\frac{x}{2}$.

3.186. 1) $\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}5x=0$; 2) $\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}5x=0$;
3) $\operatorname{ctg}3x-\operatorname{ctg}x=0$; 4) $\operatorname{ctg}7x+\operatorname{ctg}x=0$;
5) $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-2\operatorname{tg}3x=0$;
6) $\operatorname{tg}5x-\operatorname{tg}3x-2\operatorname{tg}2x=0$;
7) $\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}(1-x)=0$;
8) $\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-2\sin 2x=0$.

3.187. 1) $\frac{1+\cos x}{1-\sin x}=3$; 2) $\frac{1-\cos x}{1+\sin x}=\frac{1}{3}$.

3.188. 1) $\cos 2x\operatorname{ctg}3x-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0$;
2) $\cos 3x\operatorname{tg}2x+\sin 3x+\sqrt{2}\sin 5x=0$;
3) $\cos 2x\operatorname{tg}6x-\sin 2x-2\sin 4x=0$;
4) $\cos 3x\operatorname{ctg}6x-\sin 3x+2\cos 9x=0$.

3.189. 1) $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$; 2) $4\sin 4x\sin 12x=\frac{5}{4}$;
3) $\cos 2x\cos 6x=-\frac{1}{2}$; 4) $\cos 3x\cos 9x=-\frac{5}{16}$.

3.190. 1) $4\sin^2 x+\sin^2 2x=3$;
2) $6\sin^2 x+2\sin^2 2x=5$;
3) $\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=1{,}5$;
4) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$;
5) $\sin^2 3x+\sin^2 4x-\sin^2 5x-\sin^2 6x=0$;
6) $\sin^2 2x+\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 5x=2$.

3.191. 1) $2\sin^2\frac{x}{2}+\cos 2x=0$;
2) $3\cos^2 x-3\sin^2 x+\cos 2x=0$;
3) $\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0{,}25$;
4) $\sin^4\frac{x}{6}+\cos^4\frac{x}{6}=\frac{5}{8}$;

дукацыйны партал

5) $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$;

6) $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x$;

7) $\cos^6 x-\sin^6 x=\frac{13}{8}\cos^2 2x$;

8) $\cos^6\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\sin^6\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.

3.192. 1) $3\cos 4x-2\sin^2 2x-\sin 4x=0$;

2) $5\sin^2 2x+0{,}5\sin 4x-\cos 4x=0$;

3) $\sin 4x+3\cos 4x=2\sin^2 2x$;

4) $4\sin^2 2x+\sin 4x=3$;

5) $5\sin^2 2x+3\cos 4x=2{,}5\sin 4x$;

6) $4\cos 4x+0{,}5\sin 4x=\sin^2 2x$;

7) $2\cos 6x+3\sin^2 3x=1{,}5\sin 6x$;

8) $5\sin^2\frac{x}{3}+2\cos\frac{2x}{3}-3{,}5\sin\frac{2x}{3}=0$.

3.193. 1) $\sin x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$; 2) $1+\cos x=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;

3) $2\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x=2$; 4) $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=16\cos 4x$;

5) $\frac{\sin^2 x-2}{\sin^2 x-4\cos^2\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$; 6) $\sin 4x+3\sin 2x=\operatorname{tg} x$.

3.194*. 1) $\sin 5x+\cos 4x=2$; 2) $\cos 4x-\sin 5x=2$;

3) $5\sin 3x+3\cos 4x=8$; 4) $3\cos 4x-5\sin 3x=8$;

5) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\sin\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)$;

6) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$;

7) $\frac{5}{\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)}=3\sin x+4\cos x$;

8) $\frac{13}{\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}+\operatorname{arctg} 2{,}4\right)}=5\sin x+12\cos x$.

3.195*. 1) $5\sin^2 x+8\cos x+1=|\cos x|+\cos^2 x$;

2) $3\cos 2x+2\sin^2 x+4\sin|x|=0$;

3) $2\cos x-3\sin x-|\sin x|=0$;

4) $2\cos x-3\sin x-|\cos x|=0$;

5) $3\cos|x|+4\sin x-\sin|x|=0$;

6) $4\cos|x|-3\sin x-\sin|x|=0$;

7) $3\sin^2 2x-2-0{,}5|\sin 4x|=0$;

8) $5\cos^2 2x-2{,}5|\sin 4x|-3=0$;

9) $\cos 2x+\cos 6x=|\cos 4x|$;

10) $|\sqrt{3}\cos 8x|=\sin 12x-\sin 4x$.

3.196*. При каких значениях параметра a имеет решение уравнение:

1) $5\sin 2x-6\cos 2x=a$;

2) $7\cos 4x-3\sin 4x=a$;

3) $5\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)+a\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=6$;

4) $3\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-a\cos\left(\frac{\pi}{6}+2x\right)=4$?

3.197*. Решите относительно x уравнение:

1) $\sin^4\frac{4x}{5}+\cos^4\frac{4x}{5}=a$;

2) $\sin^4 x+\cos^4 x-a\sin(4x+\pi)=0$;

3) $a-\cos(\pi-x)+\sin\frac{\pi+x}{2}=0$;

4) $\sin^4 2x+\cos^4 2x+\sin 4x=a$.

▲ 3.14. Системы тригонометрических уравнений

Рассмотрим несколько систем, содержащих тригонометрические уравнения.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=-\frac{10}{3}. \end{cases}$$

Решение. *Способ 1.* Выразим y через x из второго уравнения данной системы и подставим в первое уравнение. Получим:

$$\begin{cases} y=\frac{\pi}{4}-x, & (1) \\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-\frac{10}{3}. & (2) \end{cases}$$

дукацыйны партал

Решим уравнение (2) относительно $\operatorname{tg} x$:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} = -\frac{10}{3};$$

$$3\operatorname{tg}^2 x - 13\operatorname{tg} x - 10 = 0;$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} \text{ или } \operatorname{tg} x = 5.$$

Учитывая уравнение (1), получаем равносильные исходной системе условия:

$$\begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = 5. \end{cases}$$

Решив каждую из этих систем, находим решения исходной системы уравнений.

Ответ: $x_1 = -\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n,\ y_1 = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$$x_2 = \operatorname{arctg} 5 + \pi k,\ y_2 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 - \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Замечание. Ответ к системе уравнений может быть записан и в виде множества пар:

$$\left(-\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \pi n;\ \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} - \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\left(\operatorname{arctg} 5 + \pi k,\ \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 - \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Способ 2. Напомним формулу

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

Учитывая условие, получим еще одно соотношение между переменными x и y:

$$1 = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 + \frac{10}{3}}$$

(поясните почему), откуда имеем

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{13}{3},\ \text{т. е. } \operatorname{tg} y = \frac{13}{3} - \operatorname{tg} x.$$

Поскольку по условию

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = -\frac{10}{3},$$

то

$$\operatorname{tg} x \left(\frac{13}{3} - \operatorname{tg} x\right) = -\frac{10}{3}.$$

Откуда получаем уравнение $3\operatorname{tg}^2 x - 13\operatorname{tg} x - 10 = 0$.
Дальнейшее решение совпадает с решением способом 1.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение. Складывая и вычитая уравнения данной системы, приходим к равносильной ей системе уравнений

$$\begin{cases} \cos(x-y) = 1, \\ \cos(x+y) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отсюда получим

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x + y = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Эта система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x + y = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - y = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x + y = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Решив их, получим:

$$x_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi(n+k),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad y_1 = -\frac{\pi}{3} + \pi(k-n),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi(n+k),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad y_2 = \frac{\pi}{3} + \pi(k-n),\ n \in \boldsymbol{Z},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi(k+n);\ -\frac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right);$
$\left(\frac{\pi}{3} + \pi(k+n);\ \frac{\pi}{3} + \pi(k-n)\right),\ k,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

1. Что называется решением системы уранений с двумя неизвестными?
2. Приведите примеры систем тригонометрических уравнений.

дукацыйны партал www.adu.by

Упражнения

Решите систему уравнений **(3.198—3.208)**.

3.198. 1) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}, \\ \sin x+\sin y=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3}, \\ \cos x+\cos y=1{,}5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3}, \\ \cos x-\cos y=-0{,}5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{3}, \\ \sin x+\sin y=\sqrt{3}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y=\frac{2\pi}{3}, \\ \operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=2\sqrt{3}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=-\sqrt{3}. \end{cases}$

3.199. 1) $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin(x+y)=0{,}5, \\ \cos(x-y)=\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin(x+y)=\frac{1}{2}, \\ \operatorname{tg}(x-y)=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \cos(x-y)=1, \\ \cos(x+y)=0{,}5. \end{cases}$

3.200. 1) $\begin{cases} x+y=\frac{7\pi}{3}, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=1{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=\frac{9\pi}{2}, \\ \sin^2 x-\cos^2 y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{2}, \\ \cos^2 x+\sin^2 y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=\frac{13\pi}{2}, \\ 3\cos^2 x-12\cos y=15. \end{cases}$

3.201. 1) $\begin{cases} x+y=0{,}75\pi, \\ \sin x\sin y=\frac{\sqrt{2}}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3}, \\ \cos x\cos y=0{,}5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{1}{6}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3}, \\ \operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=-\frac{1}{3}. \end{cases}$

3.202. 1) $\begin{cases} x-y=195^\circ, \\ \frac{\sin x}{\sin y}=-\frac{\sqrt{6}}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y=15^\circ, \\ \frac{\sin x}{\cos y}=\sqrt{\frac{3}{2}}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-y=-30^\circ, \\ \frac{\cos x}{\cos y}=\frac{\sqrt{3}}{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-y=30^\circ, \\ \frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y}=3. \end{cases}$

дукацыйны партал

3.203. 1) $\begin{cases} \sin x-\cos y=1, \\ \sin x+\cos y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \cos x+\sin y=\frac{1}{2}, \\ \cos x-\sin y=\frac{1}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6\cos x+8\cos y=3\sqrt{2}-4, \\ 10\cos x-14\cos y=5\sqrt{2}+7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4\sin x+10\cos 2y=5\sqrt{3}-2, \\ 6\sin x+4\cos 2y=2\sqrt{3}-3. \end{cases}$

3.204. 1) $\begin{cases} \sin x\sin y=0{,}25, \\ \cos x\cos y=0{,}75; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sin x\sin y=\frac{\sqrt{3}}{4}, \\ \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin x\sin y=\frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \sin x\cos y=\frac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}y. \end{cases}$

3.205. 1) $\begin{cases} y+\sin x=5, \\ 4y+2\sin x=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{2}y+\sqrt{12}\operatorname{ctg}x=2, \\ 2\sqrt{2}y+\sqrt{27}\operatorname{ctg}x=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y+2\operatorname{tg}x=4, \\ 2y+3\operatorname{tg}x=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4y+\sqrt{3}\cos x=-0{,}5, \\ 28y+4\sqrt{3}\cos x=1. \end{cases}$

3.206. 1) $\begin{cases} \cos 2x=0, \\ 4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1+2\cos 2x=0, \\ \sqrt{6}\cos y-4\sin x=2\sqrt{3}(1+\sin^2 y); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4\sqrt{3}\cos x+2\sin y=7, \\ 2\sqrt{3}\cos x+6\sin y=3+12\sin^2 x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2\left(5+2\sqrt{6}\right)\sin x+2\cos y=2\sqrt{2}\cos 2x-4\sqrt{2}-5\sqrt{3}, \\ 2\left(3+\sqrt{6}\right)\sin x-2\cos y+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}=0. \end{cases}$

3.207*. 1) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y - 1}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ \cos^2 x + 0{,}25 \operatorname{tg} y - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{\sin^2 x + \operatorname{ctg} y + 0{,}25}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)}} = 0, \\ 4\cos^2 x = 1 - \operatorname{tg} y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3\cos 2x - \operatorname{ctg} y + 1{,}25}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}} = 0, \\ 18\sin^2 x - 2\operatorname{ctg} y - 3 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{\frac{11}{9} - \cos^2 x + \operatorname{ctg} y}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}} = 0, \\ 4\sin^2 x = 2\operatorname{tg} y + 9. \end{cases}$

3.208*. 1) $\begin{cases} \sin^2(-2x) - \left(3 - \sqrt{2}\right)\operatorname{tg} 5y = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}, \\ \operatorname{tg}^2 5y + \left(3 - \sqrt{2}\right)\sin(-2x) = \dfrac{3\sqrt{2} - 1}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos^2(-4x) + \dfrac{\sqrt{26} - 2}{2}\operatorname{tg}(-2y) = \dfrac{\sqrt{26} - 1}{4}, \\ \operatorname{tg}^2(-2y) - \dfrac{\sqrt{26} - 2}{2}\cos(-4x) = \dfrac{\sqrt{26} - 1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sin^2 3x + \left(4 - \sqrt{3}\right)\operatorname{ctg}(-7y) = 2\sqrt{3} - 0{,}75, \\ \operatorname{ctg}^2(-7y) + \left(4 - \sqrt{3}\right)\sin 3x = 2\sqrt{3} - 0{,}75; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \cos^2(-6x) + \left(\sqrt{5} - 1\right)\operatorname{ctg}(-9y) = \dfrac{2\sqrt{5} - 1}{4}, \\ \operatorname{ctg}^2(-9y) + \left(\sqrt{5} - 1\right)\cos(-6x) = \dfrac{2\sqrt{5} - 1}{4}. \end{cases}$

▲ 3.15. Решение неравенств вида $\sin x < a$, $\sin x > a$, $\sin x \leqslant a$, $\sin x \geqslant a$

Случаи, когда $a = 0$ и $|a| \geqslant 1$, уже были рассмотрены в п. 3.3. Напомним, что решение этих неравенств при $a = 0$ сводится к нахождению промежутков знакопостоянства функции $y = \sin x$. А решение этих неравенств при $|a| = 1$ основано на знании наименьшего и наибольшего значений этой функции.

Рассмотрим случай, когда $0 < |a| < 1$, т. е. $-1 < a < 0$ или $0 < a < 1$.

Пример 1. Решить неравенство $\sin x < -\frac{1}{2}$.

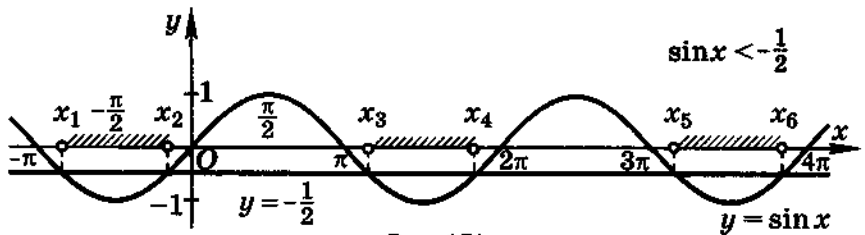


Рис. 171

Решение. Решим это неравенство, *используя графики функций*. В одной системе координат изобразим графики функций $y = \sin x$ и $y = -\frac{1}{2}$ (рис. 171). Решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$ будут абсциссы всех точек синусоиды, расположенных ниже прямой $y = -\frac{1}{2}$. На рисунке эти части синусоиды выделены синим цветом, а соответствующие им промежутки решений на оси Ox — штриховкой (концы этих промежутков отмечены светлыми кружками, так как неравенство — строгое).

Промежутков решений данного неравенства бесконечно много. Зная концы одного из этих промежутков и используя периодичность функции синус, можно записать все его решения. Определим концы того промежутка, который имеет общие точки с промежутком $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ — множеством значений функции $y = \arcsin x$ (на рисунке 171 — это промежуток $(x_1; x_2)$).

Поскольку $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x_2 = -\frac{1}{2}$, то $x_2 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ (по определению арксинуса).

На рисунке видно, что $x_1 = -\pi + |x_2| = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$.

Таким образом, решениями неравенства $\sin x < -\frac{1}{2}$ являются все x, которые принадлежат промежуткам вида $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

В тетради решение примера 1 можно записать достаточно коротко.

Решение. $\sin x < -\frac{1}{2}$ (выполнить рисунок 171).

$$x_1 + 2\pi n < x < x_2 + 2\pi n,\ n \in Z;$$

дукацыйны партал

$x_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin x_2 = -\frac{1}{2}$, значит,

$$x_2 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

$$x_1 = -\pi + |x_2| = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

Итак, $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x < -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Пример 2. Решить неравенство $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$.

Решение. Решим данное неравенство, *используя тригонометрический круг.*

Рассмотрим единичную окружность; отметим на ней точки $A_{-\frac{\pi}{2}}$ и $A_{\frac{\pi}{2}}$ (рис. 172). Поскольку по условию $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$, то отметим (синим цветом) отрезок оси ординат, соответствующий значениям синуса от $-\frac{1}{2}$ до 1. Множество точек окружности с такими ординатами также выделим голубым цветом. Концы соответствующей дуги — A_{α_1} и A_{α_2} (они имеют ординаты, равные $-\frac{1}{2}$) отметим закрашенными кружками, поскольку данное неравенство — нестрогое.

Так как $\alpha_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, то

$$\alpha_2 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Двигаясь по голубой дуге от точки A_{α_2} до точки A_{α_1}, замечаем, что движение направлено против хода часовой стрелки, значит, $\alpha_1 > \alpha_2$.

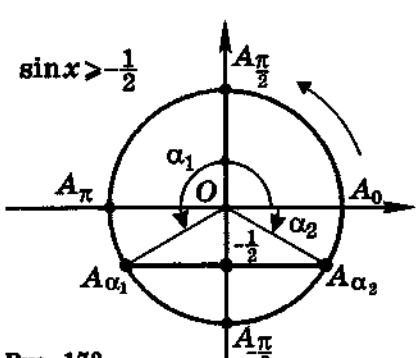


Рис. 172

На рисунке 172 видно, что

$$\alpha_1 = \pi + |\alpha_2| = \pi + \left|-\frac{\pi}{6}\right| = \frac{7\pi}{6}.$$

Итак, с учетом периодичности функции $y = \sin x$ можно записать решения данного неравенства:

$$\alpha_2 + 2\pi n \leqslant x \leqslant \alpha_1 + 2\pi n,\ n \in Z,$$

т. е. $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Таким образом, множеством решений неравенства $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ является объединение промежутков вида

$$\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in Z.$$

Запись решения примера 2 в тетради можно оформить так:

Решение. $\sin x \geqslant -\frac{1}{2}$ (выполнить рисунок 172).

Поскольку $\alpha_2 < \alpha_1$, то $\alpha_2 + 2\pi n \leqslant x \leqslant \alpha_1 + 2\pi n$, $n \in Z$.

Пусть $\alpha_2 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, так как $\sin\alpha_2 = -\frac{1}{2}$, то

$$\alpha_2 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6};$$

$$\alpha_1 = \pi + |\alpha_2| = \pi + \left|-\frac{\pi}{6}\right| = \frac{7\pi}{6}.$$

Итак, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Ответ: $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Пример 3. Решить неравенство:

а) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. а) Решим неравенство *методом интервалов.*

Это неравенство равносильно неравенству $\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant 0$.

Пусть $f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Решить неравенство а) — значит найти те значения x, при которых $f(x) \leqslant 0$. Поскольку функция f определена на множестве R и имеет период $2\pi n$, $n \in Z$, достаточно определить промежутки знакопостоянства этой функции на любом промежутке длиной 2π.

Найдем нули функции f, решив уравнение $f(x) = 0$:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in Z;$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

дукацыйны партал www.adu.by

Выпишем из полученного множества решений уравнения несколько его решений, идущих подряд (в порядке возрастания):

при $k=0$ получим $x_1=\frac{\pi}{3}$;

при $k=1$ получим $x_2=-\frac{\pi}{3}+\pi=\frac{2\pi}{3}$;

при $k=2$ получим $x_3=\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{7\pi}{3}$.

Решения выписываются подряд до тех пор, пока модуль разности между первым и последним не станет равным 2π. В рассмотренном случае расстояние от x_1 до x_3 равно 2π:

$$|x_1-x_3|=\left|\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{3}\right|=|-2\pi|=2\pi.$$

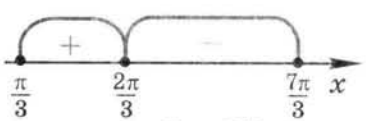


Рис. 173

Отметим выписанные решения точками координатной прямой (рис. 173). Образовались два интервала: $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right)$.

Определим теперь знаки значений функции f в отмеченных двух интервалах.

Заметив, что $\frac{\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$; $\pi\in\left(\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right)$, найдем:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}>0;$$

$$f(\pi)=\sin\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}=0-\frac{\sqrt{3}}{2}<0.$$

Соответственно, поставим знак «плюс» над интервалом $\left(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right)$ и знак «минус» над интервалом $\left(\frac{2\pi}{3};\frac{7\pi}{3}\right)$. Итак, $f(x)\leqslant 0$, если $\frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{3}$.

Учитывая периодичность функции f, запишем решение неравенства:

$$\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

В тетради это решение можно записать так:

Решение: $\sin x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant 0$ — применим метод интервалов.

Пусть $f(x)=\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $D(f)=\boldsymbol{R}$; $T=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Найдем нули функции f, решив уравнение

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};$$

$$x_1=\frac{\pi}{3}\ \text{при}\ k=0;$$

$$x_2=\frac{2\pi}{3}\ \text{при}\ k=1;$$

$$x_3=\frac{7\pi}{3}\ \text{при}\ k=2;$$

$$|x_1-x_3|=\left|\frac{\pi}{3}-\frac{7\pi}{3}\right|=2\pi.$$

Найдем промежутки знакопостоянства функции f на промежутке $[x_1;\ x_3]$ (см. рис. 173):

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}>0;\ f(\pi)=0-\frac{\sqrt{3}}{2}<0.$$

Итак, $f(x)\leqslant 0$, если $\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

Запись решения неравенства б) методом интервалов будет почти такой же, как и запись решения неравенства а), только для ответа будут выбраны другие промежутки знакопостоянства функции f, те, где $f(x)\geqslant 0$, т. е.

$$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

На рисунках 174—177 проиллюстрированы решения неравенства а) и б) с помощью графиков функций и тригонометрического круга. Определите, какими рисунками проиллюстрировано решение неравенства а), а какими — неравенства б).

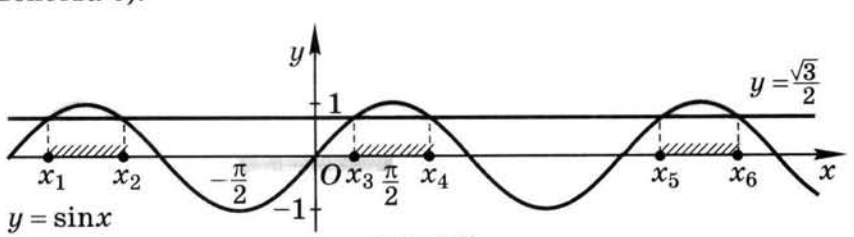


Рис. 174

дукацыйны партал www.adu.by

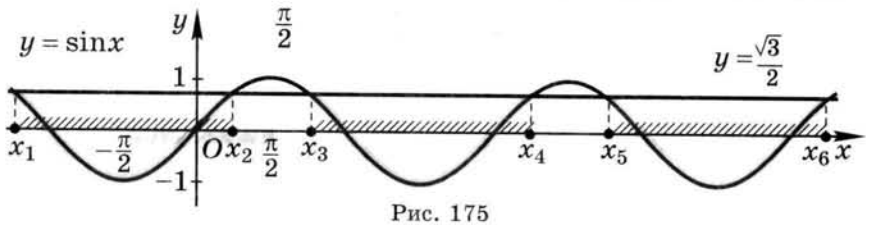


Рис. 175

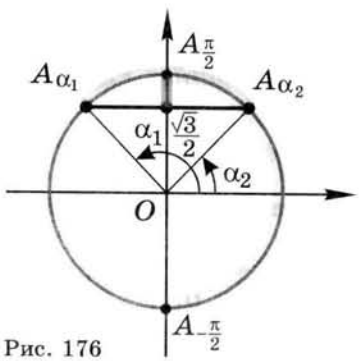


Рис. 176

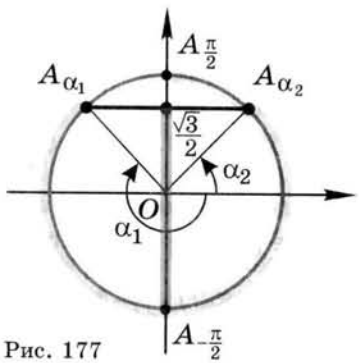


Рис. 177

Пример 4. Решить неравенство

$$\sin(3x-1) > -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Обозначив $3x-1=t$, получим $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Выполним рисунок 178.

$$t_1 + 2\pi n < t < t_2 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

$t_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\sin t_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, значит,

$$t_1 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4};$$

$$t_2 = \pi + |t_1| = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4};$$

$$-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < 3x - 1 < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z};$$

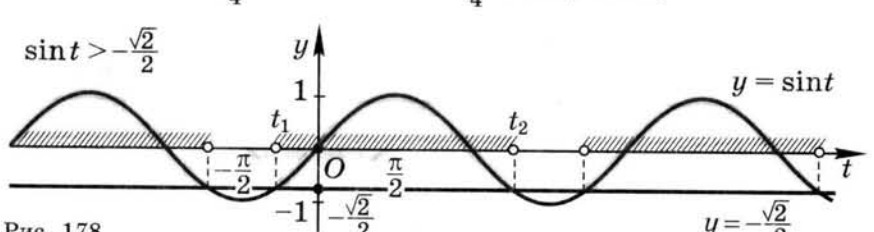


Рис. 178

дукацыйны партал

$$\frac{1}{3} - \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3} < x < \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{1}{3} + \frac{5\pi}{12} + \frac{2\pi n}{3}\right),\ n \in \mathbf{Z}.$

Решите пример 4 с помощью тригонометрического круга и метода интервалов. При любом из этих способов решения удобнее перейти к неравенству вида $\sin t > -\frac{\sqrt{2}}{2}$, используя замену переменной.

Пример 5. Решить неравенство

$$\sin x \cos\frac{\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Решение. По теореме сложения получим

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{7}\right) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Обозначив $x - \frac{\pi}{7} = t$, имеем $\sin t \geqslant \frac{1}{2}$. Далее, решив неравенство одним из трех способов (сделайте это), получим

$$\frac{13\pi}{42} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{41\pi}{42} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left[\frac{13\pi}{42} + 2\pi n; \frac{41\pi}{42} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}.$

1. Поясните, как решать неравенство $\sin x > a$ ($\sin x \leqslant a$), используя изображения графиков функций $y = \sin x$, $y = a$, если:
   а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = \frac{\sqrt{7}}{3}$; г) $a = 0$;
   д) $a = -1$; е) $a = 1$; ж) $a = -\frac{\sqrt{7}}{2}$.
2. Поясните, используя тригонометрический круг, как решать неравенство $\sin x < a$ ($\sin x \geqslant a$), если:
   а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -0{,}6$;
   г) $a = 0$; д) $a = -1$; е) $a = 1$;
   ж) $a = -\frac{\sqrt{7}}{2}$.
3. Поясните, как решать неравенство $\sin x < a$ ($\sin x \geqslant a$) методом интервалов.

Упражнения

Решите неравенство (3.209—3.216).

3.209. 1) $(\sqrt{5}-\sqrt{6})\sin\left(\frac{6\pi}{5}-2x\right)>0$;

2) $(\sqrt{3}-\pi)\sin\left(\frac{2\pi}{3}+4x\right)\leqslant 0$;

3) $\sin\left(\frac{3\pi}{8}-4x\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{8}-4x\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+2x\right)>0$;

4) $0{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{7}-\frac{5x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{2\pi}{7}\right)\geqslant 0$;

5) $\sin\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)+\sin\left(3x-\frac{5\pi}{12}\right)\geqslant 0$;

6) $\cos\left(4x-\frac{\pi}{15}\right)-\cos\left(\frac{4\pi}{15}-4x\right)>0$.

3.210. 1) $\sin^2\left(\frac{4x}{5}+\frac{\pi}{3}\right)>0$; 2) $\sin^2\left(\frac{2x}{9}-\frac{\pi}{8}\right)\leqslant 0$;

3) $\sqrt{\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}-2x\right)}\geqslant 0$; 4) $\sqrt{\sin^2\left(2x+\frac{6\pi}{5}\right)}<0$.

3.211°. 1) $\sin x>-4$; 2) $\sin x<-4$;

3) $\sin x\leqslant\pi$; 4) $\sin x\geqslant\frac{\pi}{2}$;

5) $(\sin x-1)\sin x>0$; 6) $\sin x\,(\sin x+1)<0$.

3.212°. 1) $\sin x<\frac{1}{2}$; 2) $\sin x>\frac{1}{2}$;

3) $\sin x>-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin x\leqslant-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$;

7) $\sin x>0{,}25$; 8) $\sin x\geqslant-0{,}6$.

3.213. 1) $2\sin 4x<\sqrt{3}$; 2) $2\sin\frac{x}{4}\geqslant-\sqrt{2}$;

3) $2\sin\left(\frac{5\pi}{4}-4x\right)\geqslant\sqrt{3}$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5x}{4}\right)<1$;

5) $7\sin\left(\frac{7\pi}{8}+2x\right)<-6$; 6) $7\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant-3$.

3.214. 1) $\sin\frac{4x}{3}\cos\frac{2\pi}{9}-\cos\frac{4x}{3}\sin\frac{2\pi}{9}\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sin\frac{6x}{5}\cos\frac{12\pi}{7}+\cos\frac{6x}{5}\sin\frac{12\pi}{7}>-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin\left(3x-\frac{6\pi}{5}\right)\cos\left(5x-\frac{7\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{5}-3x\right)\sin\left(5x-\frac{7\pi}{5}\right)<\frac{1}{2}$;

4) $\sin\left(2x-\frac{3\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{8}-7x\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{8}-2x\right)\sin\left(7x-\frac{5\pi}{8}\right)\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$;

5) $20\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x\cos 16x>-0{,}3125$;

6) $20\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\cos x\cos 2x\leqslant-\frac{5\sqrt{2}}{16}$.

3.215. 1) $\sin\left(5x-\frac{7\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{7\pi}{3}-5x\right)\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$;

2) $\sin\left(2x-\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$.

3.216. 1) $\frac{1}{2}\left(\sin\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(7x-\frac{\pi}{6}\right)\right)>\frac{3}{4}$;

2) $\frac{1}{2}\left(\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)\right)<\frac{\sqrt{2}}{4}$;

3) $\frac{1}{2}\left(\cos\left(6x-\frac{7\pi}{4}\right)-\cos\left(6x+\frac{7\pi}{4}\right)\right)\geqslant-\frac{1}{2}$;

4) $\frac{1}{2}\left(\sin\left(3x+\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(3x-\frac{4\pi}{3}\right)\right)\leqslant-\frac{1}{4}$;

5) $\sin\left(\frac{5x}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5x}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)\leqslant\frac{3(-1)^{-2}}{\sqrt{3}}$;

6) $\sin\left(\frac{5x}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\frac{5x}{6}\right)>\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1}$.

3.217. Решите на промежутке $[-2;\,2]$ неравенство:

1) $\sin\pi x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin\pi x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.218. Решите неравенство:

1) $(2\sin 2x-1)\sqrt{4x-x^2+5}\geqslant 0$;

2) $\left(2\sin 4x+\sqrt{3}\right)\sqrt{2-x-x^2}<0$.

3.219. Укажите естественную область определения выражения:

1) $\frac{\sqrt{\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}}}{\pi^2-9x^2}$; 2) $\frac{\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}}{\pi^2-4x^2}$.

дукацыйны партал www.adu.by

3.220*. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\sin x > \frac{1}{2},\\ \sin x < \frac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\sin x \geqslant -\frac{1}{2},\\ \sin x \leqslant \frac{1}{3};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x < \frac{2}{3}.\end{cases}$

Решите неравенство **(3.221—3.222).**

3.221*. 1) $4\sin^2 x - 3 < 0$; 2) $1 - 2\sin^2 x \geqslant 0$;

3) $25\sin^2 x - 10\sin x - 3 \geqslant 0$; 4) $49\sin^2 x + 7\sin x - 6 > 0$;

5) $35\sin^2 2x - 11\sin 2x - 6 < 0$; 6) $15\sin^2 \frac{x}{2} + 4\sin\frac{x}{2} - 4 \leqslant 0$.

3.222*. 1) $3\sin x - 2|\sin x| \leqslant 0{,}5$; 2) $4\sin x - |\sin x| > 3{,}5$;

3) $4\sin x - 2|\sin x| \leqslant 2\sin\frac{3\pi}{4}$; 4) $\sin x + |\sin x| > 2\sin\frac{5\pi}{6}$.

▲ 3.16. Решение неравенств вида $\cos x < a$, $\cos x > a$, $\cos x \leqslant a$, $\cos x \geqslant a$

Случаи, когда $a = 0$ и $|a| \geqslant 1$, уже были рассмотрены в п. 3.4.

Рассмотрим теперь случай, когда $0 < |a| < 1$, т. е. $-1 < a < 0$ или $0 < a < 1$.

Для решения таких неравенств (как и для решения неравенств с синусом) используется один из трех способов (см. п. 3.15). Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить неравенство

$$\cos x < -\frac{1}{2}.$$

Решение. Решим это неравенство, используя *изображения графиков функций*.

В одной системе координат изобразим графики функций $y = \cos x$, $y = -\frac{1}{2}$ и штриховкой отметим на оси Ox промежутки решений неравенства $\cos x < -\frac{1}{2}$ (рис. 179). Концы промежутков решений обозначены x_1, x_2, x_3, x_4; они отмечены светлыми кружками (поясните почему).

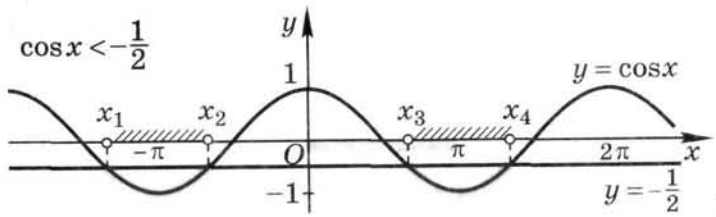


Рис. 179

Используя периодичность функции $y = \cos x$, решение данного неравенства можно записать в виде $x_3 + 2\pi n < x < x_4 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Поскольку $x_3 \in [0;\ \pi]$ и $\cos x_3 = -\frac{1}{2}$, то

$$x_3 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

На рисунке 179 видно, что $x_4 = 2\pi - |x_3| = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

Итак, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Используя рисунок 180, решите пример 1 *с помощью тригонометрического круга*.

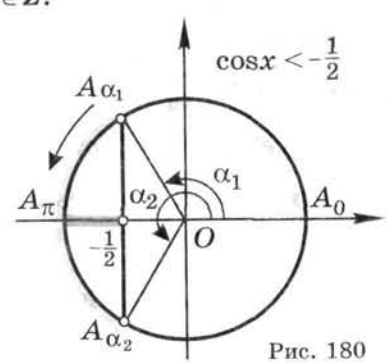


Рис. 180

Пример 2. Решить неравенство

$$\cos x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Решение. Решим это неравенство *методом интервалов*.

Перепишем данное неравенство в виде $\cos x + \frac{1}{2} \geqslant 0$.

Пусть $\cos x + \frac{1}{2} = f(x)$; $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Функция f — периодическая с наименьшим положительным периодом 2π. Найдем нули функции f на любом промежутке длиной 2π области определения, решив уравнение $f(x) = 0$:

дукацыйны партал

$$\cos x = -\frac{1}{2};$$

$$x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$x_1 = -\frac{2\pi}{3},\ x_2 = \frac{2\pi}{3} \text{ при } k = 0;$$

$$x_3 = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3} \text{ при } k = 1;$$

$$|x_1 - x_3| = \left|-\frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}\right| = \left|-\frac{6\pi}{3}\right| = 2\pi.$$

Отметим значения x_1, x_2, x_3 точками координатной прямой (рис. 181) и определим знаки значений функции f на интервалах $(x_1; x_2)$ и (x_2, x_3):

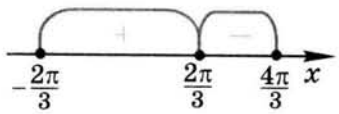


Рис. 181

$$f(0) = \cos 0 + \frac{1}{2} = 1 + 0{,}5 > 0; \quad f(\pi) = \cos\pi + 0{,}5 = -1 + 0{,}5 < 0.$$

Поставим знак «плюс» над интервалом $(x_1; x_2)$, а знак «минус» — над интервалом $(x_2; x_3)$.

Итак, с учетом периодичности функции f получим, что $f(x) \geqslant 0$ при $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\cos(3 - x) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Решение. Обозначив $3 - x = t$, получим $\cos t \geqslant \frac{1}{2}$. Это неравенство решаем любым из трех способов и получаем

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

т. е. с учетом обозначения,

$$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < 3 - x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Откуда имеем:

$$3 - \frac{\pi}{3} - 2\pi n < x < 3 + \frac{\pi}{3} - 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\left[3 - \frac{\pi}{3} - 2\pi n;\ 3 + \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right],\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пример 4*. Решить неравенство

$$\sin^2 x < \frac{1}{4}.$$

Решение. Поскольку $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, то данное неравенство примет вид:

$$1 - \cos 2x < \frac{1}{2}.$$

Решив это неравенство, получим:

$$-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n;\ \frac{\pi}{6} + \pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$.

1. Поясните, как решать неравенство $\cos x > a$ ($\cos x \leqslant a$), используя изображения графиков функций $y = \cos x$, $y = a$, если:
   а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = \frac{\sqrt{7}}{3}$;
   г) $a = 0$; д) $a = -1$; е) $a = 1$;
   ж) $a = \frac{\sqrt{7}}{2}$.
2. Поясните, как, используя тригонометрический круг, решать неравенство $\cos x < a$ ($\cos x > a$), $\cos x \leqslant a$ ($\cos x \geqslant a$), если:
   а) $-1 < a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a = -0{,}6$;
   г) $a = 0$; д) $a = -1$; е) $a = 1$;
   ж) $a = \frac{\sqrt{7}}{2}$.
3. Поясните, как решать неравенство $\cos x < a$ ($\cos x \geqslant a$) методом интервалов.

Упражнения

Решите неравенство **(3.223—3.229)**.

3.223°. 1) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{5}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{5} - 3x\right) > 0$;

2) $\left(\sqrt{12} - 2\pi\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4} - 0{,}1x\right) \leqslant 0$;

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{10} - 4x\right)\cos\left(\frac{\pi}{10} + 3x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{10} - 4x\right)\sin\left(\frac{\pi}{10} + 3x\right) \leqslant 0$;

4) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{5x}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{5x}{6} - \frac{5\pi}{12}\right) < 0$.

Адукацыйны партал www.adu.by

3.224. 1) $\cos^2\left(\frac{2x}{11}-\frac{\pi}{6}\right)\geqslant 0$; 2) $\cos^2\left(\frac{15x}{4}-\frac{7\pi}{5}\right)<0$;

3) $\sqrt{\cos^2\left(\frac{6\pi}{5}-5x\right)}>0$; 4) $\sqrt{\cos^2\left(4x-\frac{12\pi}{5}\right)}\leqslant 0$.

3.225°. 1) $\cos x>3$; 2) $\cos x<4$;

3) $\cos x\leqslant -\frac{3\pi}{2}$; 4) $\cos x\geqslant -\frac{3\pi}{4}$;

5) $\cos x(\cos x+1)\geqslant 0$; 6) $(\cos x-1)\cos x\leqslant 0$.

3.226°. 1) $\cos x\leqslant -\frac{1}{2}$; 2) $\cos x\geqslant -\frac{1}{2}$;

3) $\cos x\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos x\geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;

5) $\cos x>-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\cos x\leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

7) $\cos x\leqslant -0{,}4$; 8) $\cos x\geqslant -0{,}1$.

3.227. 1) $2\cos 3x>-1$; 2) $2\cos\frac{x}{3}\geqslant -\sqrt{2}$;

3) $2\cos\left(\frac{3\pi}{4}-3x\right)\leqslant -1$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{5}+\frac{5x}{2}\right)>-\sqrt{2}$;

5) $9\cos\left(4x-\frac{7\pi}{3}\right)\geqslant -4$; 6) $7\cos\left(6x-\frac{7\pi}{6}\right)\leqslant -3$.

3.228. 1) $\cos\left(\frac{7\pi}{8}-4x\right)\cos\left(5x-\frac{9\pi}{8}\right)+$

$+\sin\left(3x-\frac{7\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{9\pi}{8}-5x\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$;

2) $\cos\left(\frac{13\pi}{6}-9x\right)\cos\left(3x-\frac{11\pi}{6}\right)-$

$-\sin\left(9x-\frac{13\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{11\pi}{6}-3x\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sin^2\left(\frac{4\pi}{5}-\frac{5x}{3}\right)-\cos^2\left(\frac{5x}{3}-\frac{4\pi}{5}\right)<-\frac{1}{2}$;

4) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{7x}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{7x}{2}-\frac{5\pi}{6}\right)>-0{,}5$.

3.229. 1) $\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}+5x\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}-5x\right)\right)\leqslant -\frac{3}{4}$;

2) $\frac{1}{2}\left(\cos\left(6x-\frac{7\pi}{4}\right)+\cos\left(6x+\frac{7\pi}{4}\right)\right)\geqslant -\frac{\sqrt{2}}{4}$;

3) $\sin\left(\frac{7x}{6}-\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\frac{7x}{6}\right)\geqslant\sqrt{3}$;

4) $\cos\left(\frac{2x}{5}-\frac{7\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{2x}{5}+\frac{7\pi}{3}\right)<-1$.

3.230. Решите неравенство на промежутке $[-2{,}5;\ 2{,}5]$:

1) $\cos\pi x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos\pi x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.231. Решите неравенство:

1) $\left(2\cos\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)\sqrt{5+4x-x^2}>0$;

2) $\left(2\cos\frac{x}{4}+1\right)\sqrt{8+2x-x^2}\leqslant 0$.

3.232. Укажите естественную область определения выражения:

1) $\frac{\sqrt{2\cos x+\sqrt{3}}}{2\sin x-1}$; 2) $\frac{\sqrt{2\cos x-\sqrt{2}}}{2\sin x+\sqrt{2}}$.

3.233*. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases}\cos x\geqslant -\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x<\frac{\sqrt{2}}{2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}\cos x>\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos x\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$

3) $\begin{cases}\cos x\geqslant -\frac{1}{2},\\ \cos x\leqslant\frac{1}{3};\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\cos x\geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos x<\frac{2}{3}.\end{cases}$

Решите неравенство **(3.234—3.236)**.

3.234*. 1) $\cos x<\cos^2 x$; 2) $\cos x\geqslant\cos^2 x$;

3) $\cos^2 x>\cos^3 x$; 4) $\cos^2 x\leqslant\cos^3 x$;

5) $2\cos^2 x-1>0$; 6) $4\cos^2 x-1\leqslant 0$.

3.235*. 1) $3\cos^2 x+10\cos x+3\geqslant 0$;

2) $2\cos^2 x+5\cos x+2>0$;

3) $35\cos^2\left(2x-\frac{7\pi}{3}\right)+6\cos\left(2x-\frac{7\pi}{3}\right)-9\geqslant 0$;

4) $49\cos^2\left(\frac{x}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)+7\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{5\pi}{4}\right)-12<0$.

3.236*. 1) $3\cos x-2|\cos x|\leqslant 0{,}5$; 2) $4\cos x-|\cos x|>3{,}5$;

3) $\left|6\cos\left(4x-\frac{6\pi}{5}\right)+2\right|\geqslant 4$; 4) $\left|7\cos\left(5x+\frac{3\pi}{7}\right)-3\right|\leqslant 7$.

дукацыйны партал www.adu.by

▲ 3.17. Решение неравенств вида $\operatorname{tg} x < a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x \leqslant a$, $\operatorname{tg} x \geqslant a$, $\operatorname{ctg} x < a$, $\operatorname{ctg} x > a$, $\operatorname{ctg} x \leqslant a$, $\operatorname{ctg} x \geqslant a$

Неравенства этого вида имеют решения при любом a. Решение таких неравенств при $a = 0$ фактически было рассмотрено в п. 3.6, 3.7. Оно сводится к нахождению промежутков знакопостоянства функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

На примерах покажем различные подходы к решению неравенств при $a \neq 0$.

Пример 1. Решить неравенство

$$\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}.$$

Решение. Решим это неравенство *с использованием графиков функций*.

Достаточно решить неравенство $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и воспользоваться периодичностью функции $y = \operatorname{tg} x$.

Изобразим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и $y = -\sqrt{3}$ (рис. 182). Они пересекаются в точке M с абсциссой $x_M = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$ (поясните почему). Абсциссы точек графика $y = \operatorname{tg} x$, находящихся выше прямой $y = -\sqrt{3}$ (на рисунке они выделены красным цветом), являются решениями неравенства на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Эти решения показаны на оси Ox штриховкой (см. рис. 182), причем точка $-\frac{\pi}{3}$ отмечена закрашенным кружком, а точка $\frac{\pi}{2}$ — светлым кружком (поясните почему). Итак, решениями неравенства $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ являются значения x, удовлетворяющие условию $-\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$.

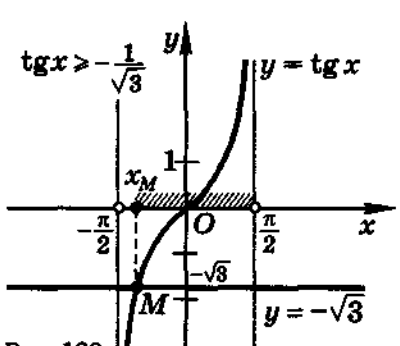


Рис. 182

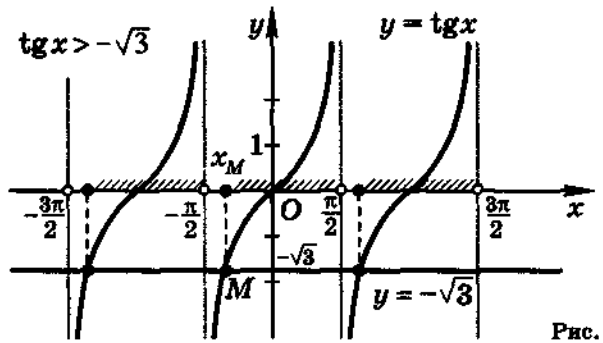


Рис. 183

Используя периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, получаем решения исходного неравенства:

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z \text{ (рис. 183).}$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in Z.$

В тетради решение примера 1 можно записать значительно короче:

Решение. $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$ (выполнить рисунок 182).

M — точка пересечения графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = -\sqrt{3}$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Значит,

$$x_M = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in Z.$

Решим неравенство из примера 1 *с использованием свойств функции* $y = \operatorname{tg} x$.

По условию $\operatorname{tg} x \geqslant -\sqrt{3}$, значит, на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ имеем $\operatorname{tg} x \geqslant \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, т. е. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \operatorname{tg} x$.

Поскольку на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает, то $-\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Используя периодичность функции $y = \operatorname{tg} x$, имеем:

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z.$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in Z.$

дукацыйны партал

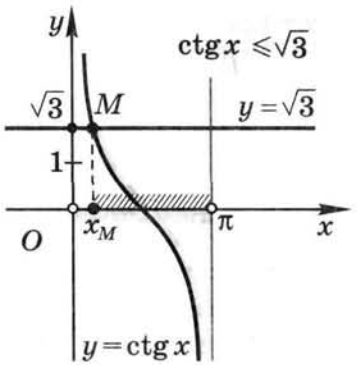


Рис. 184

Пример 2. Решить неравенство

$$\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}.$$

Решение. Используя рисунок 184, получим:

$$\frac{\pi}{6} + \pi k \leqslant x < \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \pi + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Замечание. Уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$ мы сводили к уравнению вида $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$ (см. п. 3.11). Но подобная замена может привести к ошибке при решении неравенств. Например, было бы грубой ошибкой заменить решение неравенства $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$ решением неравенства $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Используя рисунки 185 и 186, убедитесь, что неравенства $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$ ***не являются*** равносильными.

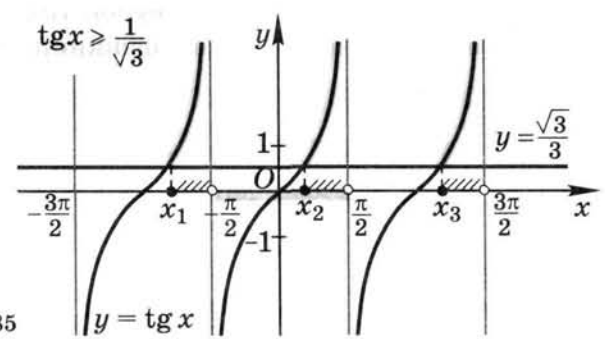


Рис. 185

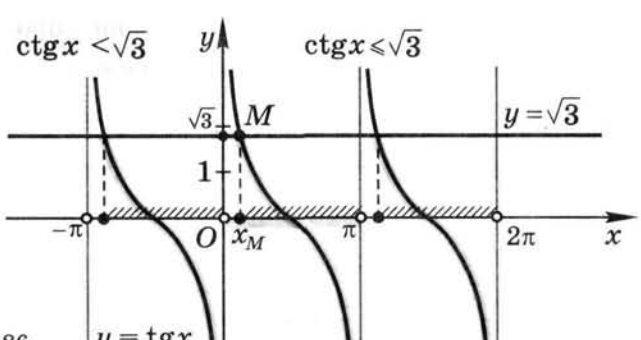


Рис. 186

Пример 3. Решить неравенство:

а) $\operatorname{ctg}(2x-3) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+1\right) < -\sqrt{3}$.

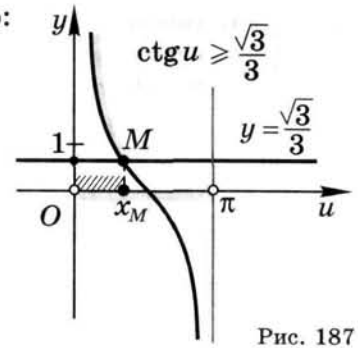


Рис. 187

Решение. а) Если обозначить $2x - 3 = u$, то данное неравенство примет вид $\operatorname{ctg} u \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$. Решив это неравенство (любым способом — рис. 187), получим:

$$\pi k < u \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

С учетом обозначения имеем:

$$\pi k < 2x - 3 \leqslant \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

откуда находим

$$\frac{3}{2} + \pi k < x \leqslant \frac{3}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $\left(\frac{3}{2} + \pi k;\ \frac{3}{2} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}\right],\ k \in \boldsymbol{Z}.$

б) Решите это неравенство самостоятельно двумя способами: используя свойства функции тангенс (без изображения ее графика) и используя рисунок 188.

Ответ: $\left(-3 - \frac{3\pi}{2} + 3\pi n;\ -3 - \pi + 3\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}.$

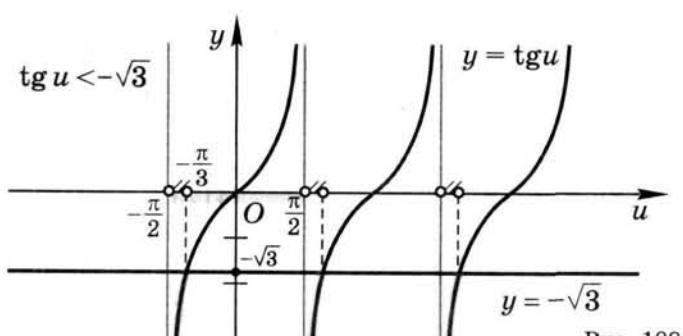


Рис. 188

дукацыйны партал www.adu.by

1. Поясните, как решать неравенство $\operatorname{tg} x > a$ ($\operatorname{ctg} x \leqslant a$), используя изображения графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$), $y = a$, если:

   а) $a = -1$; б) $a = 5$; в) $a = 0$.

2. Поясните, как решать неравенство $\operatorname{tg} x \leqslant a$ ($\operatorname{ctg} x > a$), используя свойства функции $y = \operatorname{tg} x$ ($y = \operatorname{ctg} x$), если:

   а) $a = -4$; б) $a = 1$; в) $a = 0$.

Упражнения

Решите неравенство **(3.237—3.238)**.

3.237°. 1) $\left(\sqrt{13} - \sqrt{14}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{7} - 3x\right) < 0$;

2) $\left(\pi - \sqrt{8}\right)\operatorname{tg}\left(3x - \frac{6\pi}{5}\right) \geqslant 0$;

3) $\left(\sqrt{17} - \sqrt{21}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{9\pi}{2} - 5x\right) < 0$;

4) $\left(4\pi - \sqrt{140}\right)\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{7\pi}{3}\right) \geqslant 0$.

3.238. 1) $\dfrac{2\operatorname{tg}\left(5x - \frac{2\pi}{9}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(5x - \frac{2\pi}{9}\right)} > 0$; 2) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(2x + \frac{3\pi}{8}\right) - 1}{2\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{3\pi}{8}\right)} < 0$;

3) $\dfrac{1 - \cos\left(\frac{4x}{5} + \frac{3\pi}{7}\right)}{\sin\left(\frac{4x}{5} + \frac{3\pi}{7}\right)} \geqslant 0$; 4) $\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)}{1 + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{5}\right)} \leqslant 0$.

3.239. Найдите естественную область определения выражения:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{-\operatorname{tg} 2x}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{-\operatorname{ctg} 2x}}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5} - 6\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{6}\right)}$; 4) $\sqrt{\left(2 - \sqrt{6}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{5x}{4}\right)}$.

Решите неравенство **(3.240—3.242)**.

3.240. 1) $\operatorname{tg} x < 1$; 2) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$;

3) $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

5) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\operatorname{ctg} x > -1$;

7) $\operatorname{ctg} x \geqslant 6$; 8) $\operatorname{tg} x \geqslant -10$.

3.241. 1) $\sqrt{3}\operatorname{tg} 3x > -1$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{4} \geqslant -1$;

3) $3\operatorname{ctg} 4x < \sqrt{3}$; 4) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2} \leqslant 3$;

5) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3x}{2}\right) > -1$; 6) $3\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right) \leqslant -\sqrt{3}$;

7) $5\operatorname{ctg}\left(\frac{4\pi}{9} + 3x\right) < 40$; 8) $-8\operatorname{tg}\left(6x - \frac{5\pi}{3}\right) \geqslant -12$.

3.242. 1) $\dfrac{2\operatorname{tg}\left(3x - \frac{2\pi}{7}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(3x - \frac{2\pi}{7}\right) - 1} \geqslant 1$; 2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\left(3{,}5x + \frac{3\pi}{14}\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(3{,}5x + \frac{3\pi}{14}\right)} > -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

3) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\left(4x + \frac{\pi}{12}\right) - 1}{2\operatorname{ctg}\left(4x + \frac{\pi}{12}\right)} < \sqrt{3}$; 4) $\dfrac{1 - \operatorname{ctg}^2\left(4x - \frac{3\pi}{8}\right)}{2\operatorname{ctg}\left(4x - \frac{3\pi}{8}\right)} \leqslant -1$.

3.243*. Решите на промежутке:

а) $[-1; 3]$; б) $[-3; 1]$

неравенство:

1) $\operatorname{tg}\pi x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$; 2) $\operatorname{ctg}\pi x \leqslant \sqrt{3}$;

3) $\operatorname{ctg}\pi x > -1$; 4) $\operatorname{tg}\pi x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

5) $\operatorname{ctg}\pi x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\operatorname{ctg}\pi x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

3.244*. Решите неравенство:

1) $(\operatorname{tg} 2x - 1)\sqrt{4x - x^2 + 5} \geqslant 0$;

2) $\left(3\operatorname{tg} 4x + \sqrt{3}\right)\sqrt{2 - x - x^2} < 0$;

3) $\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \sqrt{3}\right)\sqrt{6 + 5x - x^2} > 0$;

4) $\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{4} + 1\right)\sqrt{12 + 4x - x^2} \leqslant 0$.

3.245. Укажите естественную область определения выражения:

1) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x - \frac{\sqrt{3}}{3}}}{\pi^2 - 9x^2}$; 2) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}}{\pi^2 - 4x^2}$;

3) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}}}{2\cos x - 1}$; 4) $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ctg} x + 1}}{2\cos x - \sqrt{2}}$.

дукацыйны партал www.adu.by

3.246*. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} \operatorname{tg} x > -1, \\ \operatorname{tg} x < 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x > -1, \\ \operatorname{ctg} x < 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \operatorname{ctg} x > 1, \\ \operatorname{ctg} x < \sqrt{3}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \operatorname{tg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{tg} x \leqslant \sqrt{3}. \end{cases}$

Решите неравенство **(3.247—3.250).**

3.247*. 1) $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg}^2 x$; 2) $\operatorname{tg} x \geqslant \operatorname{tg}^2 x$;
3) $\operatorname{ctg}^2 x > \operatorname{ctg}^3 x$; 4) $\operatorname{ctg}^2 x \leqslant \operatorname{ctg}^3 x$.

3.248*. 1) $\operatorname{tg}^2 x - 1 > 0$; 2) $3\operatorname{tg}^2 x - 3 < 0$;
3) $3\operatorname{ctg}^2 x - 1 \leqslant 0$; 4) $3 - \operatorname{ctg}^2 x \geqslant 0$;
5) $\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x - 20 \geqslant 0$; 6) $\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 27 > 0$;
7) $\operatorname{ctg}^2 x - 7\operatorname{ctg} x - 18 \geqslant 0$; 8) $\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 6 > 0$.

3.249*. 1) $\left|9\operatorname{tg}\left(2x - \frac{6\pi}{5}\right) + 4\right| \geqslant 8$; 2) $\left|2\operatorname{tg}\left(4x + \frac{3\pi}{7}\right) - 5\right| \leqslant 9$;

3) $\left|5\operatorname{ctg}\left(2x - \frac{8\pi}{7}\right) - 6\right| \leqslant 12$; 4) $\left|3\operatorname{ctg}\left(5x - \frac{9\pi}{5}\right) + 6\right| \geqslant 9$.

3.250*. 1) $4\operatorname{tg} x - 2|\operatorname{tg} x| \leqslant 2\cos\frac{7\pi}{4}$;

2) $\operatorname{tg} x + |\operatorname{tg} x| > 2\sin\frac{17\pi}{6}$;

3) $8\operatorname{ctg} x - 5|\operatorname{ctg} x| > 7{,}5$;

4) $2\operatorname{ctg} x - 6|\operatorname{ctg} x| \leqslant 2\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$.

дукацыйны партал

ОТВЕТЫ

Глава 1. Производная

1.1. Рис. 8. б), в), д).

1.2. Рис. 9. а) [–2; 2]; б) [–2; 2]; в) –2; 0; 2; г) (0; 0);
Рис. 10. а) [–3; 3]; б) [0; 3]; в) 0; г) (0; 0);
Рис. 11. а) [–4; 6]; б) [–5; 2]; в) –4; 1; г) (0; –4);
Рис. 12. а) [–4; 3]; б) [–4; 4]; в) –2; г) (0; –3).

1.3. Рис. 13. а) [–2; 0]; б) [0; 2]; в) ≈ 1,5; г) 0; д) –2; 2; е) (–2; 2);
Рис. 14. а) [0; 3]; б) [3; 6]; в) 3; г) –2; д) 1; 5; е) [0; 1), (1; 5), (5; 6];
Рис. 15. а) [0; 2]; б) [–2; 0]; в) 4; г) –2; д) –1; 1; е) [–2; –1), (–1; 1), (1; 2];
Рис. 16. а) [0; 4]; б) нет; в) 3; г) –1; д) 1; е) [0; 1), (1; 4].

1.4. 2) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$; 4) (–8; 5); 6) [–7; –2) ∪ (–2; 0] ∪ [7; 13) ∪ (13; +∞).

1.5. 1) 4; 6; 3) –4; 1; 5) 1; 3; 6.

1.6. 2) Убывает на R; 4) возрастает на (–∞; 0), (0; +∞); 6) возрастает на R;
8) возрастает на (–∞; 0], убывает на [0; +∞).

1.7. 1) (–∞; 0), $\left(0; 2\frac{1}{3}\right)$, $\left(2\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 3) (–∞; –3), (–3; –2), (–2; +∞);
5) (–∞; 1,64), (1,64; 2].

1.8. 1) г, д; 2) б, в, е.

1.10. 1) $f(-2) = 5$, $f(10) = -8$, $f(-7) = -9{,}3$; $f(4) = 0$.

1.13. 2) $f(-8) < f(8)$; 4) $f\left(-\frac{4}{5}\right) < f\left(-\frac{5}{7}\right)$; 6) Таких значений не существует.

1.14. 1) $f(29) > f(30)$; 3) $f\left(-\frac{2}{3}\right) < f\left(-\frac{4}{5}\right)$. **1.15.** 2) 12; 4) $\frac{2}{3}$; 6) $-\frac{1}{12}$.

1.16. а) 1; в) –3; д) 0. **1.17.** 2) $y = -4x + 14$; 4) $y = 0{,}2x + 5{,}6$.

1.18. 1) $y = -\frac{1}{9}x - 2\frac{1}{9}$; 3) $y = 11x - 16$.

1.19. 2) $y = -5x + 15$; 4) $y = -0{,}8x - 1{,}8$. **1.20.** 1) и 4); 2) и 5); 3) и 6).

1.21. 1) $y = -x - 1$; 3) $y = -x + 5$. **1.22.** 2) $y = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3}$; 4) $y = 0{,}1x + 2{,}5$.

1.23. 1) $y = \frac{1}{8}x + 5\frac{5}{8}$; 3) $y = \frac{1}{8}x + 13\frac{7}{8}$.

1.24. 2) $y = \sqrt{3}x - 3\sqrt{3} + 1$; 3) $y = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 1$.

1.25. 1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{3} + 1$; 3) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$.

1.26. 2) –7. **1.27.** 1) 45°. **1.28.** б) (0; 1); г) (–10; +∞).

1.29. 1) Например, (1,8; 2,1), (1; 3), (0; 5); 3) например, (–13; –11), (–14; –10), (–20; 0).

1.30. 2) Например, –12,9; –12,5; –11,3; 4) например, 32; 50; 100.

1.31. а) $\Delta x = 8$, $\Delta f = -2$.

1.32. 2) $-3(\Delta x)$; 4) $-2x_0(\Delta x)$; 6) $-\dfrac{3(\Delta x)}{x_0(x_0+\Delta x)}$.

1.33. 1) $-1{,}2$; 3) $0{,}48$; 5) $2{,}25$.

1.34. 2) $\Delta x = 3{,}6$; $\Delta y = -1{,}8$; 4) $\Delta x = 2{,}2$; $\Delta y = -2\dfrac{107}{150}$.

1.35. 1) $\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}$; 3) $\sqrt{4x_0+4(\Delta x)-1}-\sqrt{4x_0-1}$.

1.36. 2) $4{,}5 > -1$. **1.37.** 1) $y = -3x - 5$. **1.38.** 2) -3; 4) $14{,}4$.

1.39. 1) 3; 3) 4. **1.40.** 2) 0; 4) 0. **1.41.** 1) 4; 3) $-2{,}5$; 5) $-0{,}5$.

1.42. 2) -7; 4) -1. **1.43.** 1) $3{,}5$; 3) $0{,}8$; 5) -9.

1.44. 2) -11; 4) -2; 6) -2. **1.45.** 1) -500; 3) 1; 5) $9{,}88$.

1.46. 2) 5; 4) $1{,}5$. **1.47.** а) $y = 1$; в) $y = 2x$; д) $y = -2x$. **1.48.** 2) $-\dfrac{2}{3}$; 4) 2.

1.49. 1) $(-\infty; -0{,}1]$; 3) $\varnothing$; 5) $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. **1.50.** 2) 6; 4) -1.

1.51. 1) Например, $y = 2x - 1$; 3) например, $y = x^2 + 5$;
5) например, $y = 0{,}5x^2 + x - 3$; 7) например, $y = \sqrt{x} + 2x - 2{,}5$.

1.52. 2) $\approx 40\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$; 4) $110\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. **1.53.** 1) 12; 3) $2t_0 + \Delta t$. **1.54.** 2) $40\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.55. 1) 1; 3) 4. **1.56.** 2) 5. **1.57.** 1) $2t\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; 3) $16\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. **1.58.** $8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.59. 2) $-\dfrac{12}{11}$ с. **1.60.** 1) $\dfrac{1}{7}$ с. **1.61.** 2) $2{,}4\ \frac{\text{град}}{\text{с}}$. **1.62.** 1) $12\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.63. 1) 5 с; 2) 145 м. **1.64.** $71\ \frac{\text{А}}{\text{с}}$. **1.65.** 1728 Дж.

1.66. 2) $6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 18 Дж; 4 Н. **1.67.** 1) $\left(4\sqrt{2}-4\right)\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. **1.68.** 2) $y = 4$.

1.69. 1) Минус.

1.70. б) В точке x_1 знак «$-$», в точке x_2 знак «$+$», в точке x_3 $k = 0$; г) в точке x_1 знак «$-$», в точке x_2 $k = 0$, в точке x_3 знак «$-$».

1.71. 1) -2; 2) -2; 3) $0{,}42$; 4) 1. **1.72.** 1) 10; 3) -2.

1.73. 2) Острый, развернутый, тупой.

1.74. 2) $y = 6x - 10$; 4) $y = x + 2$. **1.75.** 1) $y = 5x + 3$; 3) $y = 2x$.

1.76. 2) $y = -4x - 7$; 4) $y = 2x - 11$; 6) $y = -4x - 6$.

1.77. 1) $(2; -2)$. **1.78.** 2) $y = -4$.

1.79. 1) $(-1{,}5; -0{,}75)$; 3) $(0; 1)$; 5) $\left(\dfrac{1}{12}; \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$. **1.80.** 2) $(-1{,}25; 0)$.

1.81. 1) $(2; -7)$. **1.82.** 2) $y = -x$; $y = 3x - 8$. **1.83.** 1) $(0; -7)$.

1.84. 2) -7. **1.85.** 1) $4x^3$; 3) $-5x^{-6}$; 5) $-\dfrac{6}{x^7}$.

1.86. 2) $6x^2 - 3$; 4) $2x^3 - 5x^2 - 3x$. **1.87.** 1) $x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{4}$; 3) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{x^4}$.

дукацыйны партал

1.88. 2) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{x}$; 4) $\dfrac{x-4\sqrt{x}}{x} + \dfrac{16}{x^5}$; 6) $1 + 3x^{-4}$.

1.89. 1) $1 - \dfrac{1}{x^2}$; 3) $4 + \dfrac{1}{x^2}$.

1.90. 2) $3x^2 - 18x + 20$; 4) $-\dfrac{7}{3}x^6 + 8x^5 + 5x^4 - 16x^3$.

1.91. 1) $\dfrac{2}{(x+1)^2}$; 3) $\dfrac{x^2-3}{x^2}$.

1.92. 2) $\dfrac{-4x^2+14x+16}{(x^2+4)^2}$; 4) $\dfrac{x^2+2x+4}{(x^2-4)^2}$; 6) $-\dfrac{7x^2-10x+12}{(x^2-x-1)^2}$.

1.93. 1) Верно.

1.94. 2) $f'(0) = 0$, $g'(0) = 1{,}25$; 4) $f'(9) = 337{,}5$, $g'(9) = \dfrac{11}{147}$.

1.95. 1) ± 1; 3) ± 2; 5) $\dfrac{2}{3}$. **1.96.** 2) -3; 0; 4) 1. **1.97.** 1) $(1; +\infty)$.

1.98. 2) $(-0{,}5; 0) \cup (0; +\infty)$. **1.99.** 1) $\left(-2; \dfrac{13\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(2; -\dfrac{7\sqrt{3}}{3}\right)$.

1.101. а) 1) $[x_2; +\infty)$; 2) $(-\infty; x_2]$; 3) $(x_2; +\infty)$; 4) $(-\infty; x_2)$; в) 1) $[x_1; x_2]$; 2) $(-\infty; x_1]$, $[x_2; +\infty)$; 3) $(x_1; x_2)$; 4) $(-\infty; x_1)$, $(x_2; +\infty)$.

1.102. б) Возрастает на промежутках $(-\infty; 1]$, $[2; +\infty)$, убывает на промежутке $[1; 2]$; г) возрастает на промежутках $(-\infty; -6]$, $[-2; 2]$, убывает на промежутках $[-6; -2]$, $[2; +\infty)$.

1.103. а) Положительны на промежутке $(a; b)$, отрицательны на промежутках $[m; a)$, $(b; n]$; в) положительны на промежутках $(b; c)$, $(e; h]$; отрицательны на промежутках $[a; b)$, $(c; e)$.

1.104. 2) Убывает на промежутке $[-4; 3]$, возрастает на промежутках $(-\infty; -4]$, $[3; +\infty)$; 4) убывает на промежутках $(-\infty; -41]$, $[-6; 7]$, возрастает на промежутках $[-41; -6]$, $[7; +\infty)$; 6) убывает на промежутках $[-6; -5]$, $[-2; 2]$, $[5; 6]$, возрастает на промежутках $(-\infty; -6]$, $[-5; -2]$, $[2; 5]$, $[6; +\infty)$.

1.105. 1) Возрастает на $\boldsymbol{R}$; 3) убывает на $\boldsymbol{R}$; 5) убывает на промежутках $[7; 0]$, $[5; +\infty)$, возрастает на промежутках $(-\infty; 7]$, $[0; 5]$.

1.107. 2) Промежуток возрастания $[1; +\infty)$, промежуток убывания $(-\infty; 1]$.

1.108. 1) Промежутки возрастания: $(-\infty; -2]$, $[2; +\infty)$, промежуток убывания $[-2; 2]$; 3) промежутки возрастания: $(-\infty; -2]$, $[0{,}5; +\infty)$, промежуток убывания $[-2; 0{,}5]$; 5) промежуток возрастания $[1; +\infty)$, промежуток убывания $(-\infty; 1]$; 7) промежутки возрастания: $(-\infty; 0]$, $[6; +\infty)$, промежуток убывания $[0; 6]$.

1.109. 2) Промежутки возрастания: $(-\infty; 0{,}25)$, $(0{,}25; +\infty)$, промежутков убывания нет; 4) промежуток возрастания $(-\infty; -2)$, промежуток убывания $(-2; +\infty)$.

1.110. 1) Промежутков возрастания нет, промежутки убывания: $(-\infty; -0{,}2)$, $(-0{,}2; +\infty)$; 3) промежутки возрастания: $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$, промежутков убывания нет; 5) промежутки возрастания: $(-\infty; -1{,}5]$, $[3{,}5; +\infty)$, промежуток убывания $[-1{,}5; 3{,}5]$.

1.111. 2) $a > 0$; 4) $\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 3$.

1.113. 1) Промежуток возрастания $\boldsymbol{R}$, промежутков убывания нет, число нулей функции равно 1.

1.114. а) x_2 — точка минимума; в) x_2 — точка максимума, x_1 — точка минимума.

1.115. б) f, k, q; г) n, k, p, t.

1.116. 1) $\frac{5}{6}$ — точка экстремума, $f\left(\frac{5}{6}\right) = -3\frac{1}{12}$; 3) -3; $\frac{1}{2}$ — точки экстремума, $f(-3) = -79$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4}$; 5) 2 — точка экстремума, $f(2) = -41$.

1.117. 2) $-\frac{3}{4}$ — точка минимума, $f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{256}$; 4) нет.

1.118. 1) $-\frac{1}{2}$ — точка максимума, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -9$; 3) -7 — точка максимума, 7 — точка минимума, $f(-7) = -2$, $f(7) = 2$; 5) -1 — точка максимума, 3 — точка минимума, $f(-1) = -4$, $f(3) = 12$.

1.119. 2) 1 — точка максимума, $f(1) = 1$; 4) $\frac{1}{4}$ — точка максимума, $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$.

1.120. 1) $3\frac{1}{3}$ — точка максимума, $f\left(3\frac{1}{3}\right) = 2\frac{2}{7}$; 3) -1 — точка минимума, $f(-1) = -1$.

1.121. 2) а) $\boldsymbol{R}$; б) промежутков возрастания нет, промежуток убывания $\boldsymbol{R}$; в) нет; 4) а) $\boldsymbol{R}$; б)промежуток возрастания $[-1; 1]$, промежутки убывания: $(-\infty; 1]$, $[1; +\infty)$; в) ± 1 — точки экстремума, $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$.

1.122. 1) $-1{,}2$, $f(-1{,}2) = 0{,}072$; 2) $-1{,}2$. **1.123.** 1) 4,5, $f(4{,}5) = \frac{21}{32}$; 2) 4,5.

1.124. 1) -2, $f(-2) = 24 + \sqrt{21}$; 2) -2.

1.125. 1) 2, $f(2) = 48 - \sqrt{5}$; 2) $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

1.126. 1) $f_{\max} = 13$, $f_{\min} = -7$; 3) $f_{\max} = 0$, $f_{\min} = -8$; 5) $f_{\max} = 9$, $f_{\min} = 0$.

1.127. 1) $f_{\max} = 0$, $f_{\min} = -5$; 3) $f_{\max} = 4$, $f_{\min} = -104$.

1.128. 1) $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = -\frac{1}{3}$; 3) $f_{\max} = 4$, $f_{\min} = -14$.

1.129. 2) $f_{\max} = 3{,}25$, $f_{\min} = 2$; 4) $f_{\max} = 1$, $f_{\min} = -3{,}875$.

1.130. 1) $f_{\max} = 2\frac{2}{5}$, $f_{\min} = 2\frac{2}{45}$; 3) $f_{\max} = 2{,}8$, $f_{\min} = -3{,}5$.

1.131. 2) 5 с, $40\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 4) 8 с, $-26\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. **1.132.** 1) 3 с, $27\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$; 3) 7 с, $-49\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

1.133. 1) $S_{\max} = 25$ м^2, 5×5 м; $S_{\min} = 16$ м^2, 2×8 м; 2) $S_{\max} = 81$ м^2, 9×9 м; $S_{\min} = 65$ м^2, 5×13 м.

1.134. 1) 30×30 м; 2) 200×200 м. **1.135.** 1) $48 = 24 + 24$; 2) $16 = 8 + 8$.

1.136. 1) $18 = 1 + 17$; 2) $10 = 5 + 5$.

1.137. 2) $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ см, $S = 2$ см^2; 2) $2 \times 2 \times 1$ дм.

1.138. 1) Прямоугольный; 2) 48 см. **1.139.** 2) $2\sqrt{3} \times 8$ см; 2) $3\sqrt{3} \times 12$ см.

1.140. 1) 3 см^2; 2) 12 м^2. **1.142.** 1) Да; 2) да. **1.143.** 1) $7\frac{1}{3}$; 2) 17,5.

1.144. 1) $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2\frac{1}{3}$; 2) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 1\frac{1}{4}$.

1.145. 1) $F(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x + 3\frac{1}{3}$; 2) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 5x + 2\frac{5}{12}$.

1.146. 1) $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 5\frac{1}{6}$; 2) $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + x + 2\frac{1}{10}$.

1.147. 1) 120 м; 2) 27 м. **1.148.** 1) $S = t^3 + \frac{t^2}{2} + 2$.

Глава 2. Тригонометрические выражения

2.1. 2) 72°; 4) 30°. **2.2.** 1) 30°; 60°.

2.3. 2) $\sin 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$.

2.4. 1) $\approx 53°$; 3) $\approx 41°$; 5) $\approx 22°$; 7) $\approx 18°$. **2.5.** 2) $\alpha < \beta$; 4) $\alpha > \beta$.

2.6. 1) 45°. **2.7.** 2) $\frac{6 - 7\sqrt{3}}{6}$; 4) 7. **2.8.** 1) 2,25; 3) 1.

2.9. 2) $5\frac{1}{3}$; 4; $5\frac{1}{3}$; 4) 2; 2; 2. **2.10.** 1) 1; 3) $\cos^2 \alpha$.

2.11. 2) Например, $3\sin 30° - \frac{5}{3}\sin 45° + 3\sin 60°$; 4) например, $\frac{1}{9}\cos 60° - \frac{19}{4}\cos 45° - \cos 30°$.

2.12. 1) Например, $2\operatorname{tg} 30° + \operatorname{tg} 45° - 4\operatorname{tg} 60°$; 3) например, $\frac{7}{3}\operatorname{ctg} 60° - \operatorname{ctg} 45° + 2\operatorname{ctg} 30°$.

2.13. 2) $\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$.

2.14. 1) $90° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $180° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $270° + 360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $360°n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

дукацыйны партал www.adu.by

2.18. 2) III, II, I, I, II; 4) IV, IV, I, IV, I.

2.19. 1) $360° + 66°$; 3) $360° (-3) + 231°$; 5) $360° \cdot 10 - 76°$; 7) $360° (-4) + 99°$.

2.20. 2) $-530°$, $-170°$, $190°$, $550°$, $910°$; 4) $-540°$, $-180°$, $180°$, $540°$, $900°$.

2.21. 1) 0; 3) -3; 5) -1. **2.22.** 2) II.

2.23. 1) Например, $-80°$, $-440°$, $640°$; 3) например, $-15°$, $-375°$, $705°$.

2.24. а) 1) Например, $-180°$, $180°$, $540°$; 3) например, $-225°$, $135°$, $495°$; б) 2) например, $-330°$, $30°$, $390°$; 4) например, $-120°$, $240°$, $600°$.

2.25. 2) Например, $-345°$, $15°$, $375°$; 4) например, $-65°$, $295°$, $655°$.

2.26. 1) Абсцисса меньше нуля, ордината больше нуля; 3) абсцисса меньше нуля, ордината меньше нуля.

2.27. 2) Абсцисса равна нулю, ордината равна либо -1, либо 1.

2.28. 1) Например, $-330°$, $30°$, $390°$, $750°$, $1110°$; 3) например, $-120°$, $-60°$, $240°$, $300°$, $660°$; 5) например, $-540°$, $-180°$, $0°$, $180°$, $360°$.

2.29. 2) Например, $-495°$, $-135°$, $135°$, $225°$, $495°$; 4) например, $-765°$, $-405°$, $-45°$, $45°$, $405°$; 6) например, $-720°$, $-360°$, $0°$, $360°$, $720°$.

2.30. 1) $120°$; 3) $-135°$; 5) $105°$; 7) $216°$.

2.31. 2) $\approx 177{,}6°$; 4) $\approx 154{,}7°$; 6) $\approx 573°$.

2.32. 1) $\approx 0{,}03$; 3) $\approx 0{,}7$; 5) $\approx -2{,}36$; 7) $\approx 17{,}8$.

2.33. 2) $45°$, $45°$, $90°$; $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$; 4) $150°$; $\frac{5\pi}{6}$; 6) $108°$; $\frac{3\pi}{5}$.

2.34. 1) $120°$; $\frac{2\pi}{3}$; 3) $72°$; $\frac{2\pi}{5}$; 5) $30°$; $\frac{\pi}{6}$.

2.35. 2) $(0; 1)$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$; 4) $(0; -1)$, $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

2.36. 1) $x_{\frac{3\pi}{4}} < 0$, $y_{\frac{3\pi}{4}} > 0$; $x_{\frac{5\pi}{4}} < 0$, $y_{\frac{5\pi}{4}} < 0$; $x_{\frac{7\pi}{4}} > 0$, $y_{\frac{7\pi}{4}} < 0$; 3) $x_{-\frac{\pi}{6}} > 0$, $y_{-\frac{\pi}{6}} < 0$; $x_{-\frac{5\pi}{6}} < 0$, $y_{-\frac{5\pi}{6}} < 0$; $x_{-\frac{11\pi}{6}} > 0$, $y_{-\frac{11\pi}{6}} > 0$.

2.37. 2) $x < y$; 4) $x > y$; 6) $x < y$; 8) $x < y$.

2.38. 1) $x_2 < 0$; $y_2 > 0$; $2 + 2\pi n$, $n \in Z$; 3) $x_{-4} < 0$; $y_{-4} > 0$; $-4 + 2\pi n$, $n \in Z$; 5) $x_{10} < 0$; $y_{10} < 0$; $10 + 2\pi n$, $n \in Z$; 7) $x_{-8} < 0$; $y_{-8} > 0$; $-8 + 2\pi n$, $n \in Z$.

2.39. 2) $\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}$; 4) $\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{10}$; 6) $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$.

2.40. 1) $10{,}6\pi = 2\pi \cdot 5 + 0{,}6\pi$; II; 3) $-\frac{19\pi}{3} = 2\pi \cdot (-4) + \frac{5\pi}{3}$; IV; 5) $-\frac{24\pi}{5} = 2\pi \cdot (-3) + \frac{6\pi}{5}$; III; 7) $\frac{5\pi}{6} = 2\pi \cdot 0 + \frac{5\pi}{6}$; II.

2.41. 2) Нет; 4) нет; 6) 2. **2.42.** 1) Да; 3) не всегда. **2.43.** 2) $-\cos\alpha$; 4) 1.

2.44. 1) $\sin 65° \approx 0{,}9$; $\cos 65° \approx 0{,}4$; $\sin 160° \approx 0{,}3$; $\cos 160° \approx -0{,}9$; $\sin 335° \approx -0{,}4$; $\cos 335° \approx 0{,}9$; 3) $\sin 410° \approx 0{,}8$; $\cos 410° \approx 0{,}6$; $\sin 1705° \approx -1$; $\cos 1705° \approx -0{,}1$; $\sin 3360° \approx 0{,}9$; $\cos 3360° \approx -0{,}5$.

2.45. 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right) \approx -0{,}3$; $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right) \approx 1$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{5}\right) \approx -1$; $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right) \approx -0{,}3$; $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \approx -0{,}9$; $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \approx -0{,}5$; $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) \approx -0{,}9$; $\cos\left(-\frac{14\pi}{3}\right) \approx -0{,}5$; $\sin\left(-\frac{22\pi}{5}\right) \approx -1$; $\cos\left(-\frac{22\pi}{5}\right) \approx 0{,}3$; $\sin\left(-\frac{13\pi}{6}\right) \approx -0{,}5$; $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) \approx 0{,}9$.

2.46. 1) $\sin 1 \approx 0{,}8$; $\cos 1 \approx 0{,}5$; $\sin 1{,}5 \approx 1$; $\cos 1{,}5 \approx 0{,}1$; $\sin 2 \approx 0{,}9$; $\cos 2 \approx -0{,}4$; $\sin 2{,}5 \approx -0{,}8$; $\cos 2{,}5 \approx -0{,}8$; $\sin 3 \approx 0{,}1$; $\cos 3 \approx -1$; 3) $\sin(-4) \approx 0{,}8$; $\cos(-4) \approx -0{,}7$; $\sin(-4{,}5) \approx 1$; $\cos(-4{,}5) \approx -0{,}2$; $\sin(-5) \approx 1$; $\cos(-5) \approx 0{,}3$; $\sin(-5{,}5) \approx 0{,}7$; $\cos(-5{,}5) \approx 0{,}7$; $\sin(-6) \approx 0{,}3$; $\cos(-6) \approx 1$.

2.47. 2) $-\sqrt{3}$; 4) 1,5; 6) $\frac{1 - 2\sqrt{6}}{4}$. **2.48.** 1) 0; 3) $\frac{\sqrt{3} - 2}{2}$; 5) $\frac{1 + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$.

2.49. 2) Например, $-\frac{17\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$; 4) например, $-\frac{25\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{6}$; $\frac{11\pi}{6}$; $\frac{23\pi}{6}$; 6) например, $-\frac{9\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$.

2.50. 1) Например, $-\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{4\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$; 3) например, $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$; 5) например, -5π; -3π; $-\pi$; π; 3π.

2.51. 2) Например, $\frac{\pi}{2}$; 4) нет; 6) например, $-\frac{\pi}{2}$.

2.52. 1) Например, $\approx 37°$; 3) нет; 5) например, $\approx -37°$.

2.53. 2) а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$; в) $-\frac{10\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{4\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$.

2.54. 1) а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $\frac{15\pi}{4}$; в) $-\frac{25\pi}{4}$, $-\frac{23\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$, $-\frac{15\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$; г) $-\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

2.55. 1) $-0{,}96$; 2) $\pm 1{,}2$. **2.56.** 1) I; 3) II; 5) I или III; 7) I или II.

2.57. 2) Знаки $\sin\alpha$: $-$, $-$, $+$, $+$; знаки $\cos\alpha$: $+$, $-$, $+$, $-$; 4) знаки $\sin\alpha$: $+$, $+$, $-$, $-$; знаки $\cos\alpha$: $+$, $-$, $+$, $-$; 6) знаки $\sin\alpha$: $-$, $-$, $+$, $+$; знаки $\cos\alpha$: $-$, $-$, $+$, $-$.

2.58. 1) Да; 3) нет; 5) да; 7) нет.

2.59. 2) πn, $n \in Z$; 4) ни при каких; 6) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 8) ни при каких.

2.60. 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $-2\pi + 8\pi n$, $n \in Z$; 5) $\frac{5}{6} + \frac{\pi n}{6}$, $n \in Z$; 7) $\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$.

2.61. 2) $\sin(-1288°) > 0$, $\sin 2039° < 0$, $\cos 4742° > 0$, $\cos(-2105°) > 0$; 4) $\sin\frac{37\pi}{9} > 0$, $\sin\left(-\frac{17\pi}{13}\right) > 0$, $\cos\frac{14\pi}{11} < 0$, $\cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right) > 0$; 6) $\sin(-2{,}5) < 0$, $\sin 41 < 0$, $\cos 4{,}7 < 0$, $\cos(-81) < 0$.

2.62. 1) $+$; 3) $+$; 5) $-$; 7) $-$. **2.63.** 2) $+$; 4) $+$; 6) $+$.

дукацыйны партал www.adu.by

2.64. 1) $\cos 4\pi$, $\sin 3\pi$, $\cos 3\pi$; 3) $\sin\frac{73\pi}{2}$, $\cos\frac{33\pi}{2}$, $\cos 29\pi$.

2.65. 2) $\approx -48°$, $\approx 48°$; 4) $\approx -49°$, $\approx -131°$.

2.66. 1) 5; –5; 3) 3; 1; 5) –8; –9; 7) 0; –1; 9) $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{5}$.

2.67. 2) $(\pi; 2\pi)$; 4) $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}\right)$.

2.68. 1) $(-2\pi; -\pi)$; 3) $\left(-\frac{13\pi}{6}; -\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right)$.

2.69. 2) 0; 4) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 6) $(\cos\alpha - \sin\alpha)^2$.

2.70. 1) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; 3) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$; 7) $\arccos(-1) = \pi$.

2.71. 2) $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$; 6) $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 8) $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2.72. 1) $[-2; 0]$; 3) $[-1; 1]$; 5) $[-1; 0]$.

2.73. 2) 2π; 4) $\frac{7\pi}{4}$. **2.74.** 1) $\frac{\pi}{12}$; 3) $-\frac{11\pi}{12}$; 5) $\frac{5\pi}{2}$.

2.75. 2) Да; 4) нет. **2.76.** 1) 0; 3) $\pi - 2\arccos\beta$.

2.77. 2) $\arcsin(-1) < \arccos(-1)$; 4) $\arccos(-1) > \arcsin 0$;

6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.78. 1) $\frac{\pi}{2} - 2$; 3) $\frac{(6-\sqrt{2})\pi - 8\sqrt{2}}{8}$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 7) $\frac{(2-\sqrt{2})\pi + 8\sqrt{2}}{8}$.

2.79. 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.80.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{4}$; 5) 0; 7) $\frac{4\pi}{5}$.

2.81. 2) $\frac{3\pi}{5}$; 4) $\frac{\pi}{5}$; 6) $\frac{\pi}{5}$. **2.82.** 1) $\pi - 3$; 3) $12 - 4\pi$; 5) 2,5.

2.83. 2) Нет; 4) да. **2.84.** 1) Да; 2) нет.

2.85. 2) Значения $\operatorname{tg}\alpha$: $\approx 0{,}6$; –1,4; 2,1; 1,2; значения $\operatorname{ctg}\alpha$: $\approx 1{,}7$; –0,7; 0,5; 0,8; 4) значения $\operatorname{tg}\alpha$: $\approx 0{,}6$; 1,7; –1,7; –2,4; значения $\operatorname{ctg}\alpha$: $\approx 1{,}7$; 0,6; –0,6; –0,4.

2.86. 1) III или IV; 3) II или III; 5) I или II.

2.87. 2) Плюс; 4) минус; 6) плюс. **2.88.** 1) Нет; 3) да.

2.89. 2) Минус; 4) минус; 6) плюс. **2.90.** 1) Минус; 3) минус; 5) минус.

2.91. 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{3}$. **2.92.** 1) $\frac{m+1}{m}$; 3) $m + 1$. **2.93.** 2) 0; 4) $-2\operatorname{tg}\alpha$; 6) 0.

2.94. 1) πn, $n \in Z$; 3) $\frac{1}{2} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; 5) $-60 + 10\pi n$, $n \in Z$.

2.95. 2) $\frac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{2} n$, $n \in Z$; 6) $\frac{5\pi}{36} + \frac{\pi}{12} n$, $n \in Z$.

2.96. 1) $-2\cos\alpha$; 3) 1; 5) $-\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$. **2.97.** 2) $\approx -34°$; 4) $\approx -74°$.

2.98. 1) $\approx 68°$; 3) $\approx -24°$.

2.100. 2) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$; 4) $\operatorname{arcctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; 6) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$;

8) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

2.101. 1) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$; 5) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$;

2.102. 2) Да; 4) нет. **2.103.** 1) $\frac{5\pi}{12}$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\sqrt{3}$.

2.104. 2) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$; 4) $\operatorname{arctg} 0 < \operatorname{arcctg}(-1)$;

6) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.105. 1) 3,7; 3) –1,4; 5) –0,25. **2.106.** 2) 0,05. **2.107.** 1) $-\frac{3\pi}{8}$; 3) $\frac{\pi}{5}$; 5) $\frac{7\pi}{8}$.

2.108. 2) $\cos\beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg}\beta = -2\sqrt{2}$; 4) $\sin\beta = \frac{9}{41}$, $\operatorname{tg}\beta = -\frac{9}{40}$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{40}{9}$; 6) $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{2}$; 8) $\sin\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = -2$.

2.109. 1) $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{15}{8}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; 5) $\sin\alpha = -\frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{2}$.

2.110. 2) $-\cos^2\alpha$; 4) $2\sin\alpha$; 6) $2\sin\alpha$; 8) $\cos^2\alpha$.

2.111. 1) $1 - \sin\alpha$; 3) $\sin\alpha + \cos\alpha$; 5) $\frac{1}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; 7) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$.

2.112. 2) $2 + \sqrt{3}$; 4) 0; 6) $\sqrt{2}$. **2.113.** 1) $\sin^2\alpha$; 3) $\sin^2\alpha$; 5) 0.

2.114. 2) $\cos\alpha$; 4) $-\frac{1}{\sin\alpha}$. **2.116.** 1) Нет; 3) 2; 0; 5) нет.

2.117. 2) $\frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$; $\frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; 6) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$; $\pi + \pi n$, $n \in Z$; 8) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$, $n \in Z$.

2.118. 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $2\pi n$, $n \in Z$.

2.119. 1), 2), 3), 4). **2.120.** 1), 2), 3), 4). **2.121.** 1), 3), 4).

2.122. 1) $-\operatorname{tg}\alpha$; 3) $-\sin\alpha$; 5) $\cos\alpha$; 7) $\operatorname{tg}\alpha$; 9) $-\operatorname{ctg}\alpha$.

2.123. 2) $-\frac{1}{2}$; 4) 1; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 8) –1; 10) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 12) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2.124. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) 1; 5) $-\frac{1}{2}$; 7) $-\sqrt{3}$; 9) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 11) $-\sqrt{3}$.

дукацыйны партал www.adu.by

2.125. 2) $2\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}$; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{6}$. 2.126. 1) $\frac{5\sqrt{3}+3}{6}$; 3) 0,75.

2.127. 2) $-\sin\alpha$; 4) 0; 6) 0. 2.130. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{3}{4}$; 5) 8.

2.131. 2) $\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$; 4) $\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$; 6) $\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$;
8) $\frac{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha+1}$; 10) $\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

2.132. 1) $-\sqrt{3}\sin\alpha$; 3) $\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha$; 5) $\frac{2+2\operatorname{tg}^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; 7) $\frac{8\operatorname{tg}\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2.133. 2) а) $-\frac{468}{493}$; б) $\frac{132}{493}$; в) $-\frac{475}{493}$; г) $\frac{155}{493}$.

2.134. 1) а) $\frac{23}{7}$; б) 1; в) 1; г) $\frac{7}{23}$. 2.135. 2) а) $\frac{1}{2}$; б) 1.

2.136. 1) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$; 3) $-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$; 5) 1,5. 2.137. 2) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; 4) 1; 6) $2\operatorname{tg}\alpha$.

2.138. 1) $\sin105^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\cos105^\circ=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\operatorname{tg}105^\circ=-\sqrt{3}-2$,
$\operatorname{ctg}105^\circ=-2+\sqrt{3}$; 3) $\sin(-15^\circ)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\cos(-15^\circ)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,
$\operatorname{tg}(-15^\circ)=\sqrt{3}-2$, $\operatorname{ctg}(-15^\circ)=-2-\sqrt{3}$; 5) $\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,
$\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{11\pi}{12}=\sqrt{3}-2$, $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}=-2-\sqrt{3}$.

2.139. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) 0; 6) 1; 8) $\sqrt{3}$. 2.140. 1) $\sin2\alpha$.

2.141. 2) $\sqrt{3}$; 4) 1. 2.143. 1) $\frac{6\sqrt{2}-\sqrt{7}}{12}$; 3) $-\frac{55\sqrt{26}}{338}$; 5) $-\frac{33}{65}$.

2.144. 2) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in Z$.

2.146. 1) $2\sin1{,}5\alpha\cos1{,}5\alpha$; $\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}$; $\frac{1-\operatorname{tg}^2 2{,}5\alpha}{2\operatorname{tg}2{,}5\alpha}$; 3) $2\sin3\alpha\cos3\alpha$;
$\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha$; $\frac{2\operatorname{tg}4\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 4\alpha}$; 5) $2\sin\frac{\alpha}{6}\cos\frac{\alpha}{6}$; $\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}$;
$\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{3\alpha}{8}}{2\operatorname{tg}^2\frac{3\alpha}{8}}$.

2.147. 2) $2\sin\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{3\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$; 4) $\frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{5\pi}{16}\right)}{2\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{5\pi}{16}\right)}$.

2.148. 1) $\frac{1-\cos8\alpha}{2}$; 3) $\frac{1-\cos10\alpha}{1+\cos10\alpha}$; 5) $\frac{1+\sin10\alpha}{2}$; 7) $\frac{1+\sin12\alpha}{1-\sin12\alpha}$.

2.149. 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $2+\sqrt{3}$; 8) 1.

2.150. 1) $\cos40^\circ$; 3) $\cos10^\circ$; 5) $3\operatorname{ctg}10^\circ$.

2.151. 2) $-\sin^2 2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$; 6) $2\sin16\alpha$; 8) $\cos2\alpha+\frac{1}{4}\sin4\alpha$; 10) $-0{,}25$.

2.152. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{6+\sqrt{3}}{4}$; 5) $\frac{13}{16}$. 2.153. 2) $\left|\sin\frac{\alpha}{8}\right|$; 4) $|\operatorname{ctg}3\alpha|$.

2.154. 1) а) $\frac{24}{25}$; б) $-\frac{7}{25}$; в) $-\frac{24}{7}$; г) $-\frac{7}{24}$; 3) а) $-\frac{24}{25}$; б) $-\frac{7}{25}$; в) $-\frac{24}{7}$; г) $-\frac{7}{24}$.

2.155. 2) а) $-\frac{24}{25}$; б) $-\frac{7}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$.

2.156. 1) а) $-\frac{24}{25}$; б) $-\frac{7}{25}$; в) $\frac{24}{7}$; г) $\frac{7}{24}$. 2.157. а) 3; б) $\frac{9}{13}$.

2.158. 2) а) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$; б) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{3}}{6}}$; в) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

2.159. 1) а) $\frac{96}{625}$; б) $\frac{529}{625}$; в) $\frac{96}{529}$; г) $\frac{529}{96}$.

2.161. 2) -1; 4) 0; -1; 6) 1; -1.

2.162. 1) $\frac{4\sqrt{6}}{25}$; 3) $-3\sqrt{7}$; 5) $\frac{24}{25}$.

2.163. 2) $\frac{3-4\sqrt{35}}{36}$. 2.164. 1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin80^\circ$; 3) $\frac{1}{4}-\cos10^\circ$; 5) $\cos70^\circ$.

2.165. 2) $\frac{1}{2}\sin2\alpha-\frac{1}{2}\sin6\beta$; 4) $\cos6\beta-\cos4\alpha$.

2.166. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cos2\alpha$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{1}{2}\sin2\alpha$; 5) $-\frac{1}{2}-\cos2\alpha$.

2.168. 2) $\sqrt{3}\cos21^\circ$; 4) $\sqrt{3}\cos5^\circ$; 6) $\sin42^\circ$; 8) $\sqrt{3}\sin65^\circ$.

2.169. 1) $\sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{36}$; 3) $\sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{36}$; 5) $2\sin5\alpha\cos3\alpha$; 7) $2\sin2\alpha\sin3\alpha$.

2.170. 2) $-2\sin3\alpha\sin\frac{5\pi}{16}$; 4) $\sqrt{3}\sin\alpha$; 6) $-2\sin\frac{7\pi}{20}\cos2\alpha$.

2.171. 1) $(1-\operatorname{tg}7\alpha\operatorname{tg}9\alpha)\operatorname{tg}16\alpha$; 3) $\left(1+\operatorname{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\operatorname{tg}2\alpha$.

2.172. 2) 1; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $\sqrt{3}$.

2.173. 1) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{5\alpha}{2}$; 3) $4\sin13\alpha\cos3\alpha\cos6\alpha$.

2.174. 2) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$; 4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;
6) $2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 8) $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-5\alpha\right)}{\cos5\alpha}$.

дукацыйны партал

2.175. 1) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$;
5) $\frac{2\sqrt{8}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}$.

2.176. 2) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$;
6) $\frac{3\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\alpha}$.

2.177. 1) $\cos 44°$; 3) $\cos 36°$; 5) $-\frac{4\operatorname{tg}18°\operatorname{tg}42°}{\cos^2 12°}$.

2.178. 2) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;
6) $\frac{2\sqrt{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$.

2.179. 1) $2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$.

2.181. 2) $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11}$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi n}{12}$, $n\in Z$; 6) $\frac{\pi n}{7}$, $n\in Z$.

2.182. 1) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$; $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 3) $\sin\alpha=\frac{8}{17}$; $\cos\alpha=\frac{15}{17}$; $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{15}{8}$.

2.183. 2) -1. **2.184.** 1) 0,52.

2.185. 2) $\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+10\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; 4) $\frac{5+6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

2.186. 1) $\frac{3-8\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{13\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-3}$; 3) $\frac{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}{3-\operatorname{tg}^2\alpha}$; 5) $\frac{4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-4}{5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-6\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-5}$;
7) $\frac{\left(5\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+5\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(3-4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}$.

2.187. 2) $\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2 2\alpha+1}$; 4) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}2\alpha}$. **2.189.** 1) $-\frac{1}{3}$ или 2.

2.190. 2) $\frac{193}{625}$; 4) $\frac{8m^2n-n^3}{m^2+n^2}$. **2.191.** 1) $\frac{2\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left|1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right|}$; 3) $\frac{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1}{\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|}$.

2.192. 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\sqrt{6}\cos\left(4\alpha+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 6) $5\sin\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$.

2.193. 1) 2; -2; 3) 2; -2; 5) 6; -6.

2.194. 2) $-\frac{1}{16}$; 4) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{\sin 40°}{2\sin 5°}$; 8) $\frac{1+\cos 36°}{32}$.

2.196. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$; 3) $\sin 4\alpha$. **2.197.** 2) 3; 2; 4) 2; $\frac{2}{3}$.

2.198. 1) $4\cos 15°\cos 35°\cos 40°$; 3) $2\sin 70°$.

2.199. 2) $\frac{\sin\frac{\pi}{22}\sin\frac{2\pi}{33}}{\sin\frac{\pi}{66}}$; 4) $\frac{\sin\frac{3\pi}{50}\cos\frac{2\pi}{25}}{\sin\frac{\pi}{50}}$; 6) $\frac{\sin\frac{3\pi}{19}\cos\frac{5\pi}{19}}{\sin\frac{\pi}{19}}$.

Глава 3. Тригонометрические функции

3.1. 1) 2π, 4π, 6π, 10π, 12π, 16π; 3) π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 7π, 10π, 11π, 12π, 16π, 21π; 5) 6π, 12π; 7) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, π, 2π, 3π, 4π, 5π, 6π, 7π, 10π, 11π, 12π, 16π, 21π.

3.2. 2) 2π; 4) π; 6) π; 8) 2π.

3.4. 1) а) Нет; б) нет; в) нет; г) нет; д) нет; е) нет; ж) нет; з) нет; 3) а) нет; б) нет; в) нет; г) нет; д) нет; е) нет; ж) нет; з) нет.

3.5. 2) π; 4) π; 6) $\frac{\pi}{2}$; 8) 6π, 10) 6π.

3.7. 1) R, 2π; 3) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, π; 5) $x\neq\pi n$, $n\in Z$, 2π; 7) $x\neq\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$, 2π; 9) R, 2π.

3.8. 2) R, π; 4) $x\neq\pi n$, $n\in Z$, $\frac{\pi}{2}$; 6) $x\neq\pi n$, $n\in Z$, π; 8) R, π; 10) $x\neq\pi n$, $n\in Z$, π.

3.9. 1) Нет. **3.12.** 2) 0; 4) 0.

3.10. б) 4; 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) 0; 6) 0.

3.11. Рис. 102. $T=3{,}5$; рис. 103. $T=6$. **3.12.** 1) -2; 3) 2.

3.14. 1) Да; 3) нет; 5) нет; 7) нет. **3.15.** 2) Нет; 4) нет; 6) да; 8) да.

3.16. 1) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 5π; 5) 2π; 7) π. **3.17.** 2) 2; 4) 1; 6) $1{,}5\pi$; 8) 2π.

3.18. 1) Например, $y=C$ (*const*).

3.19. 2) Например, $y=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{5}$; 4) например, $y=\sin\frac{4\pi x}{3}$.

3.21. 1) $D(f)=R$, $E(f)=[0;\ 2]$; 3) $D(f)=R$, $E(f)=[-0{,}5;\ -0{,}25]$; 5) $D(f)=R$, $E(f)=[0;\ 1]$.

3.22. 2) $(0;\ 1{,}5)$; 4) $(0;\ 1)$, $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 0\right)$, $n\in Z$.

3.23. 1) $\sin\frac{7\pi}{15}$, $\sin\frac{12\pi}{5}$, $\sin\frac{9\pi}{10}$, $\sin\frac{6\pi}{5}$; 3) $\sin(-4{,}5)$, $\sin(-0{,}3)$, $\sin(-2)$, $\sin(-1{,}5)$.

3.24. 2) $\sin\frac{5\pi}{12}>\sin\frac{7\pi}{8}$; 4) $\sin\left(-\frac{7\pi}{16}\right)<\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$; 6) $\sin(-4{,}78)>\sin(-5)$.

дукацыйны партал www.adu.by

3.25. 1) Четная; 3) нечетная; 5) четная; 7) нечетная.

3.26. 2) $\sin\frac{15\pi}{8}<0$; 4) $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right)<0$; 6) $\sin 5{,}1<0$; 8) $\sin(-4{,}9)>0$.

3.27. 1) а) -1; б) 1; в) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{5\pi}{2};3\pi\right]$; д) $(\pi;2\pi)$; е) $(0;\pi)$, $(2\pi;3\pi)$; ж) 0, π, 2π, 3π; 3) а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$; г) нет; д) $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$; е) $\left(0;\frac{\pi}{3}\right)$; ж) 0; 5) а) -1; б) 1; в) $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{6}\right]$; г) $\left[-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right]$; д) $\left(-\pi;-\frac{\pi}{6}\right)$; е) $\left(-\frac{3\pi}{2};-\pi\right)$; ж) $-\pi$; 7) а) $-\sin 1$; б) 0; в) $[-1;0]$; г) нет; д) $(-1;0)$; е) нет; ж) 0.

3.28. 2) 0,8; 4) $-0{,}9$; 6) $-0{,}6$.

3.29. 1) $\frac{\pi n}{6}$, $n\in Z$; 3) $-\frac{3}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$; 5) $-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi n}{3}$, $n\in Z$; 7) $\pi+3\pi n$, $n\in Z$.

3.30. 2) $\left(\frac{2\pi n}{3};\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 6) $x\neq\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$.

3.31. 1) $[-2\pi;2\pi]$; 3) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n=-2;-1;0;1$; 5) $[-2\pi;-\pi]\cup[0;\pi]$.

3.32. 2) $[-1;5]$; 4) $[-1;0]$.

3.33. 1) $\frac{\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 5) $\approx 0{,}13$; 7) $-\frac{\pi}{2}$; 9) нет.

3.34. 2) а) $\left[8\frac{2}{3}\pi;9\pi\right)\cup\left(10\pi;10\frac{3}{8}\pi\right]$; б) $(9\pi;10\pi)$; 4) а) $[-1{,}3\pi;-\pi)\cup(0;\pi)$; б) $(-\pi;0)\cup(\pi;1{,}6\pi)$.

3.35. 1) а) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$; 3) а) $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$; 5) а) нет; б) $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; в) $-\frac{\pi}{2}$; г) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; 7) а) $\left[-\frac{\pi}{2};\arcsin\frac{5}{7}\right)$; б) $\left(\arcsin\frac{5}{7};\frac{\pi}{2}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{2};\arcsin\frac{5}{7}\right]$; г) $\left[\arcsin\frac{5}{7};\frac{\pi}{2}\right]$; 9) а) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; б) нет; в) $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; г) нет.

3.36. 2) $\arcsin 0{,}6$; $\pi-\arcsin 0{,}6$; 4) $-\arcsin 0{,}2$; $\pi+\arcsin 0{,}2$.

3.37. 1) $(\arcsin 0{,}7;\pi-\arcsin 0{,}7)$; 3) $[-\pi+\arcsin 0{,}4;-\arcsin 0{,}4]$.

3.38. 2) $[-2;0]$; 4) $[-6{,}5;-2{,}5]$; 6) $[0;1]$.

3.39. 1) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;0\right)$, $n\in Z$, $(0;1)$; 3) $(0;-3{,}7)$.

3.40. 2) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{9}\right)$, $\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)$, $\cos\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$; 4) $\cos(-1{,}7)$, $\cos 1{,}4$, $\cos 0{,}6$, $\cos 0{,}2$.

3.41. 1) $\cos\frac{5\pi}{7}>\cos\frac{7\pi}{9}$; 3) $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)<\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; 5) $\cos(-1{,}7)>\cos(-3{,}14)$; 7) $\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right)<\cos\left(-\frac{7\pi}{18}\right)$; 9) $\sin(-18{,}1)<\cos(-6{,}28)$.

3.42. 2) Нечетная; 4) нечетная; 6) четная; 8) четная.

3.43. 1) $\cos\frac{6\pi}{5}<0$; 3) $\cos\left(-\frac{3\pi}{5}\right)<0$; 5) $\cos 2<0$; 7) $\cos(-4)<0$.

3.44. 2) а) -1; б) 1; в) $[\pi;2\pi]$; г) $[0;\pi]$, $[2\pi;3\pi]$; д) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{5\pi}{2};3\pi\right]$; е) $\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right)$; ж) $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$; 4) а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\left[-\frac{\pi}{6};0\right]$; г) $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$; д) нет; е) $\left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$; ж) нет; 6) а) -1; б) $\frac{1}{2}$; в) $\left[\pi;\frac{7\pi}{6}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$; д) $\left(\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{6}\right]$; е) $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$; ж) $\frac{\pi}{2}$; 8) а) $\cos 1$; б) 1; в) $[-1;0]$; г) нет; д) нет; е) $[-1;0]$; ж) нет.

3.45. 1) $-0{,}4$; 3) 0,5; 5) $-0{,}9$.

3.46. 2) $\frac{5\pi}{2}+5\pi n, n\in Z$; 4) $-18+12\pi n$, $n\in Z$; 6) $\frac{15\pi}{16}+6\pi n$, $n\in Z$; 8) $\frac{\pi n}{6}$, $n\in Z$.

3.47. 1) $\left[-\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi n}{5};\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi n}{5}\right]$, $n\in Z$; 3) $x\neq\frac{\pi-1}{3}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\in Z$; 5) $x\neq\pi n$, $n\in Z$.

3.48. 2) $[-2\pi;-\pi)\cup(-\pi;\pi)\cup(\pi;2\pi]$;
4) $[-2\pi;-1{,}5\pi)\cup(-1{,}5\pi;-0{,}5\pi)\cup(-0{,}5\pi;0{,}5\pi)\cup(0{,}5\pi;1{,}5\pi)\cup(1{,}5\pi;2\pi]$;
6) -2π; 0; 2π.

3.49. 1) $[-6;4]$; 3) $[0;1]$. **3.50.** 2) $\pm\frac{\pi}{4}$; 4) $\varnothing$; 6) $\varnothing$; 8) 0; 10) $\varnothing$.

3.51. 1) а) $\left[-4\frac{2}{9}\pi;-3\frac{1}{2}\pi\right)\cup\left(-2\frac{1}{2}\pi;-1\frac{5}{8}\pi\right]$; б) $\left(-3\frac{1}{2}\pi;-2\frac{1}{2}\pi\right)$; 3) а) $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(1\frac{1}{2}\pi;2\frac{1}{2}\pi\right)$; б) $\left(-1{,}2\pi;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};1\frac{1}{2}\pi\right)\cup\left(2\frac{1}{2}\pi;2{,}9\pi\right]$.

3.52. 2) а) $\left(\frac{\pi}{3};\pi\right]$; б) $\left[0;\frac{\pi}{3}\right)$; в) $\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$; г) $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$; 4) а) $\left(\frac{5\pi}{6};\pi\right]$; б) $\left[0;\frac{5\pi}{6}\right)$; в) $\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$; г) $\left[0;\frac{5\pi}{6}\right]$; 6) а) $(\pi-\arccos 0{,}58;\pi]$; б) $[0;\pi-\arccos 0{,}58)$; в) $[\pi-\arccos 0{,}58;\pi]$; г) $[0;\pi-\arccos 0{,}5]$; 8) а) $\varnothing$; б) $x\neq\pi+2\pi n$, $n\in Z$; в) $\pi+2\pi n$, $n\in Z$; г) R; 10) а) R; б) $\varnothing$; в) R; г) $\varnothing$.

3.53. 1) $\arccos 0{,}4$; $2\pi-\arccos 0{,}4$; 3) $\pi-\arccos 0{,}1$; $\pi+\arccos 0{,}1$.

3.54. 2) $(\arccos 0{,}3;2\pi-\arccos 0{,}3)$; 4) $[0;\pi-\arccos 0{,}8)\cup(\pi+\arccos 0{,}8;2\pi]$.

3.62. 1) $D(f)$: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $E(f)=R$; 3) $D(f)$: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $E(f)=[0;+\infty)$; 5) $D(f)$: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$; $E(f)=[0;+\infty)$; 7) $D(f)$: $x\neq\frac{\pi}{2}n$, $n\in Z$; $E(f)=(0;+\infty)$.

дукацыйны партал www.adu.by

3.63. 2) $(\pi + 2\pi n;\ 0)$, $n \in Z$; 4) $(\pi n;\ 0)$, $n \in Z$.

3.64. 1) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{36}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{9}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}$; 3) $\operatorname{tg}(-5)$, $\operatorname{tg}(-3)$, $\operatorname{tg}3$, $\operatorname{tg}(-1)$.

3.65. 2) $\operatorname{tg}(-4{,}75\pi) < \operatorname{tg}(-5{,}6\pi)$; 4) $\operatorname{tg}4 > \operatorname{tg}6$; 6) $\operatorname{tg}(-4{,}78) > \operatorname{tg}(-7)$.

3.66. 1) Нечетная; 3) нечетная; 5) нечетная; 7) четная.

3.67. 2) $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{8} < 0$; 4) $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{7}\right) < 0$; 6) $\operatorname{tg}5{,}1 < 0$; 8) $\operatorname{tg}(-4{,}8) > 0$.

3.68. 1) а) Нет; б) 0; в) $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$; г) нет; д) $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$; е) нет; ж) 2π; 3) а) $-\operatorname{tg}\frac{4\pi}{9}$; б) $-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$; в) $\left[-\frac{4\pi}{9};\ -\frac{\pi}{6}\right]$; г) нет; д) $\left[-\frac{4\pi}{9};\ -\frac{\pi}{6}\right]$; е) нет; ж) нет; 5) а) 0; б) $\operatorname{tg}1$; в) $[0;\ 1]$; г) нет; д) нет; е) $(0;\ 1]$; ж) 0.

3.69. 2) 1,2; 4) –1,2; 6) –2,3. **3.70.** 1) Да; 3) нет; 5) нет.

3.71. 2) а) $\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6}\right)$; 4) а) нет; б) $\left[-\frac{9\pi}{4};\ 2\pi\right)$; 6) а) $[14;\ 4{,}5\pi)$, $(5\pi;\ 17]$; б) $(4{,}5\pi;\ 5\pi)$.

3.72. 1) $-\frac{3}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

3.73. 2) $\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{6}$; 6) $-\operatorname{arctg}5$; 8) $\operatorname{arctg}21$.

3.74. 1) $(-3\pi + 6\pi n;\ 6\pi n]$, $n \in Z$; 3) $\left[1 + \frac{\pi n}{2};\ 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

3.75. 2) а) $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3}\right)$; б) $\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{3}\right]$; г) $\left[\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$; 4) а) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right)$; б) $\left(-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right)$; 6) а) $\left(-\frac{\pi}{2};\ \operatorname{arctg}\pi\right)$; б) $\left(\operatorname{arctg}\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2};\ \operatorname{arctg}\pi\right]$; г) $\left[\operatorname{arctg}\pi;\ \frac{\pi}{2}\right)$; 8) а) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\operatorname{arctg}\frac{2}{9}\right)$; б) $\left(-\operatorname{arctg}\frac{2}{9};\ \frac{\pi}{2}\right)$; в) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\operatorname{arctg}\frac{2}{9}\right]$; г) $\left[-\operatorname{arctg}\frac{2}{9};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

3.79. 1) $D(f)$: $x \neq \pi n$, $n \in Z$, $E(f) = R$; 3) $D(f)$: $x \neq \pi n$, $n \in Z$, $E(f) = [0;\ +\infty)$; 5) $D(f)$: $x \neq \pi n$, $n \in Z$, $E(f) = [-2;\ +\infty)$; 7) $D(f)$: $x \neq \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$, $E(f) = (0;\ +\infty)$.

3.80. 2) $((2n+1)\pi;\ 0)$; $n \in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{22} + \frac{\pi n}{11};\ 0\right)$, $n \in Z$, $n \neq 5 + 11l$, $l \in Z$.

3.81. 1) $\operatorname{ctg}\frac{6\pi}{7}$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{ctg}\frac{12\pi}{5}$, $\operatorname{ctg}\frac{37\pi}{35}$; 3) $\operatorname{ctg}(-4)$, $\operatorname{ctg}4$, $\operatorname{ctg}(-6)$, $\operatorname{ctg}(-3)$.

3.82. 2) $\operatorname{ctg}(-5{,}2\pi) < \operatorname{ctg}(-4{,}9\pi)$; 4) $\operatorname{ctg}6 < \operatorname{ctg}5$; 6) $\operatorname{ctg}(-7{,}6) < \operatorname{ctg}(-6{,}2)$.

3.83. 1) Четная; 3) нечетная; 5) четная; 7) четная.

3.84. 2) $\operatorname{ctg}\frac{9\pi}{7} > 0$; 4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{8}\right) < 0$; 6) $\operatorname{ctg}4{,}9 < 0$; 8) $\operatorname{ctg}(-4{,}3) < 0$.

3.85. 1) а) Нет; б) нет; в) нет; г) $\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$; д) $\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$; е) нет; ж) нет; 3) а) $-\sqrt{3}$; б) $-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{9}$; в) нет; г) $\left[-\frac{7\pi}{9};\ -\frac{\pi}{6}\right]$; д) $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{6}\right]$; е) $\left[-\frac{7\pi}{9};\ -\frac{\pi}{2}\right]$; ж) $-\frac{\pi}{2}$; 5) а) $\operatorname{ctg}2$; б) $\operatorname{ctg}1$; в) нет; г) $[1;\ 2]$; д) $\left(\frac{\pi}{2};\ 2\right]$; е) $\left[1;\ \frac{\pi}{2}\right)$; ж) $\frac{\pi}{2}$.

3.86. 2) –0,3; 4) –1,8. **3.87.** 1) Нет; 3) да; 5) нет.

3.88. 2) а) $\left(-2\pi;\ -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6}\right]$; 4) а) $\left(-\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, б) $\left(-\frac{3\pi}{2};\ -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}\right]$; 6) а) $\left[4;\ \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(2\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right)$, $\left(3\pi;\ \frac{7\pi}{2}\right)$; б) $\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right)$, $\left(\frac{5\pi}{2};\ 3\pi\right)$, $\left(\frac{7\pi}{2};12\right]$.

3.89. 1) $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 3) $-\frac{2\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$.

3.90. 2) $\frac{3\pi}{4}$; 4) $\frac{\pi}{3}$; 6) $\pi - \operatorname{arcctg}8$; 8) $\operatorname{arcctg}43$.

3.91. 1) $[3\pi + 6\pi n;\ 6\pi + 6\pi n)$, $n \in Z$; 3) $\left(\frac{3\pi n}{4};\ \frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi n}{4}\right)$, $n \in Z$; 5) $\left(1 + \frac{\pi n}{2};\ 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in Z$.

3.92. 2) а) $\left(\frac{2\pi}{3};\ \pi\right)$; б) $\left(0;\ \frac{2\pi}{3}\right)$; в) $\left[\frac{2\pi}{3};\ \pi\right)$; г) $\left(0;\ \frac{2\pi}{3}\right]$; 4) а) $\left(\frac{\pi}{4};\ \pi\right)$; б) $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$; в) $\left[\frac{\pi}{4};\ \pi\right)$; г) $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right]$; 6) а) $(\pi - \operatorname{arcctg}\pi;\ \pi)$; б) $(0;\ \pi - \operatorname{arcctg}\pi)$; в) $[\pi - \operatorname{arcctg}\pi;\ \pi)$; г) $(0;\ \pi - \operatorname{arcctg}\pi]$; 8) а) $\left(\operatorname{arctg}\frac{7}{3};\ \pi\right)$; б) $\left(0;\ \operatorname{arctg}\frac{7}{3}\right)$; в) $\left[\operatorname{arctg}\frac{7}{3};\ \pi\right)$; г) $\left(0;\ \operatorname{arctg}\frac{7}{3}\right]$.

3.96. 1) $-\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{2}$.

3.97. 2) $D(f) = \left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$, $E(f) = [0;\ \pi]$; 4) $D(f) = \left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right]$, $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; $D(f) = [-6;\ 6]$, $E(f) = [0;\ \pi]$; 8) $D(f) = [-8;\ -4]$, $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$; 10) $D(f) = (-\infty;\ -6] \cup [6;\ +\infty)$, $E(f) = \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

3.98. 1) $D(f) = [0;\ 1]$, $E(f) = \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$; 3) $D(f) = [0;\ 1]$, $E(f) = \left[0;\ \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right]$; 5) $D(f) = [-1;\ 1]$, $E(f) = [0;\ \pi]$.

3.99. 2) Да; 4) нет; 6) нет.

дукацыйны партал

3.100. 1) (20; 0); 3) (15; 0); 5) (–1; 0), $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 7) (1; 0), $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.101. 2) $\arcsin\left(-\frac{2}{7}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\arccos\left(-\frac{2}{7}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 4) $\arcsin\frac{11}{13} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\arccos\frac{11}{13} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 6) никакому.

3.102. 1) $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$, $\arcsin\frac{1}{3}$, $\arcsin\frac{\pi}{4}$; 3) $\arccos 0$, $\arccos\left(-\frac{\pi}{7}\right)$, $\arccos(-0{,}7)$.

3.103. 2) Нечетная; 4) четная; 6) четная.

3.104. 1) а) 0; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; г) нет; д) нет; е) $\left(0; \frac{1}{2}\right]$; ж) 0; 3) а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) нет; г) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; д) нет; е) $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$; ж) нет; 5) а) $-\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right]$; г) нет; д) $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; е) $\left(0; \frac{1}{2}\right]$; ж) 0.

3.105. 1) 0,4; 2) 0,6; 3) 1,8; 4) –0,8. **3.106.** 1) 1; 3) –5; 3; 5) 1; 9; 7) $\varnothing$.

3.107. 2) –0,4; 4) –0,3; 6) –0,9; 8) 0,8. **3.108.** 1) $[-2; -1]$; 3) 11; 5) $\left[0; \frac{1}{6}\right]$.

3.109. 2) $[-1; -\sin 0{,}7)$; 4) $[-1; \sin 1{,}2]$; 6) $\varnothing$; 8) $(\cos 0{,}8; 1]$; 10) $[0; \cos 1{,}6]$; 12) $\varnothing$.

3.110. 1) $\left[-1; \frac{1}{2}\right)$; 3) $\left[-1; \frac{1}{2}\right)$; 5) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$; 7) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

3.111. 2) $[0; \pi]$; 4) $[-\pi; 0]$; 6) $\left(-\infty; \frac{\pi}{10(1-\pi)}\right] \cup \left[\frac{\pi}{10}; +\infty\right)$.

3.115. 1) $-\frac{\pi}{3}$; –1; 0; $\frac{\pi}{5}$; $\frac{7\pi}{15}$. **3.116.** 2) $-\frac{3\pi}{4}$; 4) 0.

3.117. 1) $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

3) $D(f)$: $x \neq 0$, $E(f) = (0; \pi)$; 5) $D(f)$: $x \neq \pm\sqrt{3}$, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

7) $D(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, $E(f) = \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.118. 2) $\left(-\frac{7\pi}{4}; \frac{17\pi}{4}\right)$; 4) $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$; 6) $\left(\frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}\right)$.

3.119. 1) $\left(0; \frac{5\pi}{6}\right)$; 3) (–1; 0), (3; 0), (0; $\operatorname{arctg} 3$).

3.120. 2) $\operatorname{arctg}(-13) \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\operatorname{arcctg}(-13) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

4) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{7}{11}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{11}\right) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$; 6) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 8) $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3.121. 1) $\operatorname{arctg} 200$, $\operatorname{arctg} 0{,}3\pi$, $\operatorname{arctg}(-10)$; 3) $\operatorname{arcctg}(-88)$, $\operatorname{arcctg} 6{,}8$, $\operatorname{arcctg} 19\pi$.

3.122. 2) Нечетная; 4) четная; 6) четная.

3.123. 1) а) $-\frac{\pi}{6}$; б) нет; в) $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$; г) нет; д) $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}; 0\right)$; е) нет; ж) нет;

3) а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{5\pi}{6}$; в) нет; г) $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$; д) нет; е) $\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$; ж) нет;

5) а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) нет; г) $\left[-1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$; д) нет; е) $\left[-1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$; ж) нет.

3.124. 1) 0,6; 2) 1,2; 3) –0,7; 4) 2,6.

3.125. 1) 1; 10; 3) –5; 3; 5) –6; –2; 7) $-2\sqrt{3} - 1$.

3.126. 2) –0,4; 4) 0,4; 6) 0,4; 8) 14,0. **3.127.** 1) $(-\infty; -2]$; 3) $(-\infty; 3]$; 5) $\boldsymbol{R}$.

3.128. 2) $[1; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{8+\sqrt{3}}{7}; +\infty\right)$; 6) $\left[\frac{5-\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

3.129. 1) $p < \frac{\pi}{10-5\pi}$, $p > \frac{\pi}{10+5\pi}$; 3) $p < \frac{3\pi}{1-\pi}$, $p > 3\pi$;

5) $-\frac{\pi}{2} \leqslant p < \frac{\pi^2 - 2\pi}{4}$.

3.134. 3) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3.135. 1) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

5) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.136. 2) $5(-1)^n \arcsin\frac{5}{8} + 5\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\varnothing$.

3.137. 1) а) $\frac{(-1)^{n+1}}{5}\arcsin\frac{1}{7} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \in [-13; 7]$; б) $\frac{(-1)^{n+1}}{5}\arcsin\frac{1}{7} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \in [-5; 14]$; 3) $\varnothing$.

3.138. 2) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pm\frac{9\pi}{4} + 6\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\pm\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3.139. 1) а) $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$; б) $-\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{3}$; 3) а) $-\frac{7\pi}{3}$, $-\frac{13\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{3}$, $\pm\frac{4\pi}{3}$, $\pm\frac{7\pi}{6}$, $\pm\frac{5\pi}{6}$, $\pm\frac{2\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{6}$; б) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \in [-3; 6]$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $n \in [-4; 5]$; 5) а) $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$; б) $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{2}$.

3.140. 2) $\pm\frac{7}{2}\arccos\frac{1}{8} + 7\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\varnothing$.

3.141. 1) $\frac{2}{5} - \frac{7\pi}{30}$; $\frac{2}{5} + \frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{2}{3} - \frac{7\pi}{12}$; $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{12}$; 5) $-\frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}$; $-\frac{1}{4} + \frac{5\pi}{12}$; 7) $\frac{1}{2} - \frac{3\pi}{8}$; $\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{8}$.

дукацыйны партал

3.142. 2) $-\frac{35}{12}, -\frac{29}{12}, -\frac{7}{4}, -\frac{7}{12}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{12}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}$;

4) $-\frac{5}{24}, -\frac{1}{24}, \frac{19}{24}, \frac{23}{24}, \frac{43}{24}, \frac{47}{24}$.

3.143. 1) $-\frac{7\pi}{3}, -\frac{13\pi}{6}, -\frac{4\pi}{3}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$; 5) $-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}$.

3.144. 2) Например, $(0; 2\pi)$; 4) например, $(-2\pi; 2\pi)$.

3.145. 1) а) 1; б) 1; в) 4; г) 4; д) 1; е) 1.

3.146. 2) $\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n, n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$;

$\frac{\pi}{3}+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; 6) $(-1)^n\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

3.147. 1) 0; 3) $\pm 2; \pm\frac{\pi}{2}$; 0; 5) -1; 6; $\frac{7\pi}{6}$.

3.148. 2) $\frac{7\pi}{6}+2\pi k, k\in Z, \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in Z, \pi n, n\in Z$.

3.149. 1) $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

3.150. 2) Если $a\geqslant\frac{1}{2}$, то $x=\pm\arccos\frac{1-a}{a}+2\pi n, n\in Z$; если $a<\frac{1}{2}$, то решений нет; 4) если $a=0$, то $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$; если $a\neq 0$, то решений нет; 6) $x=(-1)^n\arcsin\frac{1-\sqrt{4a^2+1}}{2a}+\pi n, n\in Z$; 8) если $a=0$, то $x=1$; если $a\neq 0$, то решений нет.

3.152. 1) $\pi k, k\in Z$; $\frac{1}{5}+\frac{\pi l}{5}, l\in Z$; $-1+\pi n, n\in Z$; 3) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}, k\in Z$; $3+\pi n, n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; 7) $\frac{\pi n}{4}, n\in Z$.

3.153. 2) $\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; 4) $-\frac{2\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$; 6) $\frac{5\pi}{3}+3\pi n, n\in Z$;

8) $-\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z$.

3.154. 1) а) $-\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$; 3) а) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{3}, n\in Z, n\in[-4; 6]$; 5) а) $x=-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z, n\in[-5; 10]$; 7) а) $x=-\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in Z, n\in[-1; 2]$.

3.155. 2) $\frac{3-\pi}{9}, \frac{2\pi+3}{9}$; 4) $\frac{5\pi-18}{12}, \frac{11\pi-18}{12}$.

3.156. 1) 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 3) $-1,5$; 0,5; 1,5; 2,5.

3.157. 2) $-\frac{7\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}$; 6) $-\frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$.

дукацыйны партал

3.158. 1) а) Например, $(-\pi; 3\pi)$; 3) а) например, $(0; 2\pi)$.

3.159. 2) а) 1; б) 0; в) 1; г) 1; д) 1; е) 1.

3.160. 1) $\pm 10\,000\operatorname{arctg}100+10\,000\pi n, n\in Z$; 3) $1\,000\,000\operatorname{arctg}100+1\,000\,000\pi n, n\in Z$; 5) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; 7) $-\operatorname{arctg}2+\pi n, n\in Z$, $\operatorname{arctg}2+\pi k, k\in Z$.

3.161. 2) $\varnothing$; 4) $\operatorname{arcctg}3+\pi k, k\in Z$, $\operatorname{arcctg}4+\pi n, n\in Z$. 3.162. 1) $a\geqslant -3$.

3.163. 2) Если $a=0$ и $a=1$, то $x=\operatorname{arcctg}2+\pi k, k\in Z$; если $a\neq 0$ и $a\neq 1$, то $x=\operatorname{arcctg}2+\pi n, n\in Z$, $x=\operatorname{arctg}a+\pi l, l\in Z$; 4) при $a<2\sqrt{3}-1$ решений нет;

при $2\sqrt{3}-1\leqslant a<2\sqrt{3}+3$ $x=\operatorname{arctg}\frac{a+1\pm\sqrt{a^2+2a-11}}{2}+\pi k, k\in Z$;

при $a\geqslant 2\sqrt{3}+3$ $x=\operatorname{arctg}\frac{a+1\pm\sqrt{a^2+2a-11}}{2}+\pi l, l\in Z$,

$x=\operatorname{arctg}\frac{3-a\pm\sqrt{a^2-6a-3}}{2}+\pi m, m\in Z$.

3.164. 1) $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$; $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$; 3) $(-1)^k 2\arcsin\frac{2}{3}+2\pi k, k\in Z, 2\pi n, n\in Z$; 5) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z, \frac{\pi n}{4}, n\in Z$; 7) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z, \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$.

3.165. 2) $\frac{4}{3}\pm\frac{\pi}{12}\pm\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$; 4) $\frac{4\pi}{5}+(-1)^{n+1}\frac{n}{3}+2\pi n, n\in Z$.

3.166. 1) $\pm 4\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+8\pi n, n\in Z$; 3) $(-1)^n\cdot\frac{3}{2}\arcsin\frac{\sqrt{41}-5}{4}+\frac{3}{2}\pi n, n\in Z$.

3.167. 2) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z, 2\operatorname{arctg}2+2\pi n, n\in Z$.

3.168. 1) $\frac{2\pi k}{5}, k\in Z$; 3) $10\operatorname{arctg}3+10\pi k, k\in Z, \frac{5\pi}{2}+10\pi n, n\in Z$.

3.169. 2) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}, k\in Z$; 4) $\frac{3\pi}{4}+\pi k, k\in Z$. 3.170. 1) 2; 3) 2. 3.171. 2) $\frac{\pi}{3}$.

3.172. 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; 3) $\operatorname{arctg}1,5+\pi n, n\in Z$; 5) $-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi n, n\in Z$.

3.173. 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$, $\operatorname{arcctg}13+\pi n, n\in Z$; 4) $\pi k, k\in Z$, $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; 6) $-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\pi k, k\in Z$, $\operatorname{arcctg}3+\pi n, n\in Z$.

3.174. 2) $\pi k, k\in Z$; 4) $(-1)^{k+1}\frac{2\pi}{3}+4\pi k, k\in Z$.

3.175. 1) $\frac{\pi k}{2}, k\in Z$; 3) $\pm\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\pi k, k\in Z$; 5) $\pm\arccos\left(-\frac{1}{5}\right)+2\pi k, k\in Z$.

3.176. 2) Если $\alpha \leqslant -1$ или $\alpha \geqslant 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, $x = 2\arccos\left(-\frac{1}{\alpha}\right) + 2\pi n$, $n \in Z$; если $-1 < \alpha < 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

3.177. 1) $(-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$; $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; 3) $\frac{2\pi k}{5}$, $k \in Z$.

3.178. 2) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in Z$, $k \neq 0$, $\frac{2\pi l}{3}$, $l \in Z$, $l \neq 9$, $\frac{2\pi n}{5}$, $n \in Z$, $n \neq 15$.

3.179. 1) $\frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$, πn, $n \in Z$.

3.180. 2) $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 4) $(-1)^k \frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; 6) $\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{3}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$.

3.181. 1) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in Z$, πn, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi l$, $l \in Z$, πn, $n \in Z$; 5) $\frac{3\pi}{16} + \pi k$, $k \in Z$, $\frac{7\pi}{16} + \pi l$, $l \in Z$, πn, $n \in Z$.

3.182. 2) $\frac{\pi k}{7}$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$.

3.183. 1) $(-1)^k \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$, $2\pi n$, $n \in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$, πn, $n \in Z$; 5) $\pm\frac{\pi}{8} + \pi k$, $k \in Z$; 7) $\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

3.184. 2) $\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{15}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{12} + (-1)^{k+1}\frac{4\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 6) $-\frac{\pi}{3} + (-1)^k\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$; 8) $-\frac{4\pi}{3} + (-1)^{k+1}\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in Z$.

3.185. 1) $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 3) $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 5) $-\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{100} + \frac{2\pi n}{25}$, $n \in Z$; 7) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

3.186. 2) $\frac{\pi k}{7}$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi k}{8}$, $k \in Z$; 6) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$, $k \in Z$, πn, $n \in Z$; 8) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$, $\frac{\pi k}{2}$, $n \in Z$.

3.187. 1) $-\operatorname{arctg} 3 + (-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5} + \pi k, k \in Z$.

3.188. 2) $\pm\frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in Z$, $\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$; 4) $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{36} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{9}$, $n \in Z$.

3.189. 1) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$.

3.190. 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 4) $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 6) $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

3.191. 1) $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$; 3) $\frac{\pi}{8} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 5) $\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; 7) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$, $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

3.192. 2) $-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 2 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$, $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} 3 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 4) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 6) $-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 9 + \frac{(-1)^k}{4}\arcsin\frac{\sqrt{82}}{82} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$; 8) $-\frac{3}{2}\operatorname{arcctg} 7 + (-1)^n\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi n}{2}$, $n \in Z$.

3.193. 1) $2\pi k$, $k \in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$; 5) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

3.194. 2) $1{,}5\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 4) $0{,}5\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 6) $0{,}25\pi + 2\pi k$, $k \in Z$; 8) $\pm 0{,}5\pi - \operatorname{arctg} 2{,}4 + 2\pi k$, $k \in Z$.

3.195. 1) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 3) $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, $\operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $n \in Z$; 5) $-\operatorname{arctg} 0{,}6 + \pi k$, $k = 0, -1, -2, -3, \ldots$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in N$; 7) $\pm\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in Z$; 9) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in Z$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

3.196. 2) $-\sqrt{58} \leqslant \alpha \leqslant \sqrt{58}$; 4) $a \leqslant \sqrt{7}$; $a \geqslant \sqrt{7}$.

3.197. 1) $\pm\frac{5}{16}\arccos(4a - 3) + \frac{5\pi n}{8}$, $n \in Z$, $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$; 3) если $a \in [-2; 0)$, то $x = \pm 2\arccos\frac{-1 + \sqrt{9 - 8a}}{4} + 4\pi k$, $k \in Z$; если $a \in \left[0; \frac{9}{8}\right]$, то $x = \pm 2\arccos\frac{-1 \pm \sqrt{9 - 8a}}{4} + 4\pi n$, $n \in Z$.

3.198. 1) $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} - 2\pi k\right)$, $k \in Z$; 3) $\left(\frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in Z$; 5) $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} - \pi k\right)$, $k \in Z$.

3.199. 2) $\left(\frac{7\pi}{24} + (k + n)\pi; \frac{13\pi}{24} + (k - n)\pi\right)$, $\left(\frac{13\pi}{24} + (k + n)\pi; \frac{7\pi}{24} + (k - n)\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{24} + (k + n)\pi; \frac{5\pi}{24} + (k - n)\pi\right)$, $\left(\frac{5\pi}{24} + (k + n)\pi; -\frac{\pi}{24} + (k - n)\pi\right)$, $k \in Z$, $n \in Z$.

3.200. 1) $\left(\frac{5\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} - \pi k\right)$, $k \in Z$; 3) $\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi k}{2}\right)$, $k \in Z$.

дукацыйны партал

3.201. 2) $\left(\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$, $\left(\frac{\pi}{3}+\pi n; \pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(\frac{2\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

3.202. 1) $\left(\frac{3\pi}{4}+\pi k; -\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$; 3) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k; -\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$.

3.203. 2) $\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k; \pi n\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$; 4) $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k; \pm\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$.

3.204. 1) $\left(-\frac{\pi}{6}+(k+n)\pi; -\frac{\pi}{6}+(k-n)\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+(k+n)\pi; \frac{\pi}{6}+(k-n)\pi\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$; 3) $\left(-\frac{\pi}{3}+(k+n)\pi; -\frac{\pi}{3}+(k-n)\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}+(k+n)\pi; \frac{\pi}{3}+(k-n)\pi\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$.

3.205. 2) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; -2\sqrt{2}\right)$, $k\in Z$; 4) $\left(\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \frac{1}{4}\right)$, $k\in Z$.

3.206. 1) $\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi k; (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$; 3) $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k; (-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$.

3.207. 2) $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k; -\operatorname{arctg}2+\pi n\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$; 4) $\left(2\pi k; -\operatorname{arctg}\frac{9}{2}+\pi n\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$.

3.208. 1) $\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}; -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$;

3) $\left((-1)^k\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}; -\frac{1}{7}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi n}{7}\right)$, $k\in Z$, $n\in Z$.

3.209. 2) $\left[-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$; 4) $\left[-\frac{3\pi}{35}+\frac{2\pi n}{5}; \frac{4\pi}{35}+\frac{2\pi n}{5}\right]$, $n\in Z$;

6) $\left(\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$;

3.210. 1) $x\neq-\frac{5\pi}{12}+\frac{5\pi n}{4}$, $n\in Z$; 3) R.

3.211. 2) $\varnothing$; 4) $\varnothing$; 6) $\left(-\pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi k\right)$, $k\in Z$.

3.212. 1) $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; 3) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$;

5) $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

7) $(\arcsin 0{,}25+2\pi n; \pi-\arcsin 0{,}25+2\pi n)$, $n\in Z$.

3.213. 2) $[-\pi+8\pi n; 5\pi+8\pi n]$, $n\in Z$; 4) $\left(-\frac{6\pi}{5}+\frac{8\pi n}{5}; -\frac{2\pi}{15}+\frac{8\pi n}{5}\right)$, $n\in Z$;

6) $\left[-\frac{5\pi}{24}+\frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{24}-\frac{1}{4}\arcsin\frac{3}{7}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$.

3.214. 1) $\left[\frac{57\pi}{144}+\frac{3\pi k}{2}; -\frac{\pi}{18}+\frac{3\pi k}{2}\right]$, $k\in Z$; 3) $\left(-\frac{17\pi}{240}+\frac{\pi k}{4}; \frac{23\pi}{240}+\frac{\pi k}{4}\right)$, $k\in Z$;

5) $\left(-\frac{\pi}{192}+\frac{\pi n}{16}; \frac{7\pi+\pi n}{16}\right)$, $n\in Z$.

3.215. 1) $\left[-\frac{\pi}{15}+\frac{\pi k}{5}; \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{2}\right]$, $k\in Z$.

3.216. 2) $\left(-\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$; 4) $\left[\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$;

6) $\left(-\frac{3\pi}{2}+\frac{12\pi n}{5}; \frac{6\pi}{20}+\frac{12\pi n}{5}\right)$, $n\in Z$.

3.217. 1) $\left[-\frac{7}{4}; -\frac{5}{4}\right]\cup\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right]$. **3.218.** 2) $\left(-2; -\frac{7\pi}{12}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{12}\right)$.

3.219. 1) $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$, $x\neq\frac{\pi}{3}$.

3.220. 2) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, k, $n\in Z$;

4) $\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \arcsin\frac{2}{3}+2\pi k\right)\cup\left(\pi-\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right)$, k, $n\in Z$.

3.221. 1) $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 3) $\left(-\pi+\arcsin\frac{1}{5}+2\pi k; -\arcsin\frac{1}{5}+2\pi k\right)\cup$

$\cup\left(\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n; \pi-\arcsin\frac{3}{5}+2\pi n\right)$, k, $n\in Z$;

5) $\left(-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{7}+\pi k; \frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}+\pi k\right)\cup$

$\cup\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{3}{5}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{7}+\pi n\right)$, k, $n\in Z$.

3.222. 2) $\varnothing$; 4) $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$.

3.223. 1) $\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{19\pi}{30}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$; 3) $\left[\frac{9\pi}{10}+2\pi n; \frac{19\pi}{10}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

3.224. 2) $\varnothing$; 4) $\frac{9\pi}{40}+\frac{\pi n}{4}$, $n\in Z$.

3.225. 1) $\varnothing$; 3) $\varnothing$; 5) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]\cup\{\pi+2\pi n\}$, k, $n\in Z$.

3.226. 2) $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; 4) $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

6) $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

8) $[-\pi+\arccos 0{,}1+2\pi n; \pi-\arccos 0{,}1+2\pi n]$, $n\in Z$.

3.227. 1) $\left(-\frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$; 3) $\left[\frac{17\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3}; \frac{25\pi}{36}+\frac{2\pi n}{3}\right]$, $n\in Z$;

5) $\left[\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{9}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3}+\frac{1}{4}\arccos\frac{4}{9}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$.

дукацыйны партал www.adu.by

3.228. 2) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{13\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(\frac{2\pi n}{7};\ \frac{4\pi}{21}+\frac{2\pi n}{7}\right)$, $n\in Z$.

3.229. 1) $\left[-\frac{\pi}{30}+\frac{\pi k}{5};\ \frac{\pi}{30}+\frac{\pi k}{5}\right]$, $k\in Z$; 3) $\left\{\frac{3\pi}{7}+\frac{12\pi k}{7}\right\}$, $k\in Z$.

3.230. 2) $\left[-1\frac{1}{4};-\frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right]$. **3.231.** 1) $\left(-1;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

3.232. 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right]$, $n\in Z$.

3.233. 1) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$, $n,\ k\in Z$;

3) $\left[\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;-\arccos\frac{1}{3}+2\pi k\right]$, $n,\ k\in Z$.

3.234. 2) $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$, $n\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$, $2\pi n$, $n\in Z$;

6) $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n;\ \frac{2\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

3.235. 1) $\left[\pi-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n;\ \pi+\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\right]$, $n\in Z$;

3) $\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}+\pi k\right]\cup$

$\cup\left[-\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{7}+\pi n;\ \frac{1}{2}\arccos\frac{3}{7}+\pi n\right]$, $k,\ n\in Z$.

3.236. 2) $\varnothing$; 4) $\left[-\frac{2\pi}{7}+\frac{1}{5}\arccos\frac{4}{7}+\frac{2\pi n}{5};\ \frac{4\pi}{35}-\frac{1}{5}\arccos\frac{4}{7}+\frac{2\pi n}{5}\right]$, $n\in Z$.

3.237. 1) $\left(\frac{\pi}{42}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{4\pi}{21}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$; 3) $\left(\frac{\pi n}{5};\ \frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}\right)$, $n\in Z$.

3.238. 2) $\left(-\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4};\ \frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(-\frac{6\pi}{5}+4\pi n;\ \frac{4\pi}{5}+4\pi n\right]$, $n\in Z$.

3.239. 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in Z$; 3) $\left(\frac{9\pi}{2}+6\pi n;\ \frac{15\pi}{2}+6\pi n\right]$, $n\in Z$.

3.240. 2) $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$;

6) $\left(\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 8) $\left[-\operatorname{arctg}10+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$.

3.241. 1) $\left(-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3};\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$; 3) $\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{4}\right)$, $n\in Z$;

5) $\left(-\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{2\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$; 7) $\left(-\frac{4\pi}{27}+\frac{1}{3}\operatorname{arcctg}8+\frac{\pi n}{3};\ \frac{5\pi}{27}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$.

3.242. 2) $\left(-\frac{25\pi}{294}+\frac{\pi n}{7};\ \frac{\pi}{98}+\frac{\pi n}{7}\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{\pi n}{8};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{8}\right]$, $n\in Z$.

3.243. 1) а) $\left[-\frac{5}{6};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{7}{6};\frac{3}{2}\right)\cup\left[\frac{13}{6};\frac{5}{2}\right)$; б) $\left[-2\frac{5}{6};-2\frac{1}{2}\right)\cup$

$\cup\left[-1\frac{5}{6};-1\frac{1}{2}\right)\cup\left[-\frac{5}{6};-\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$; 3) а) $\left(-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3}{4}\right)\cup$

$\cup\left(1;\frac{7}{4}\right)\cup\left(2;\frac{11}{4}\right)$; б) $\left(-3;-2\frac{1}{4}\right)\cup\left(-2;-1\frac{1}{4}\right)\cup\left(-1;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(0;\frac{3}{4}\right)$;

5) а) $\left(-1;-\frac{1}{3}\right]\cup\left(0;\frac{2}{3}\right]\cup\left(1;\frac{5}{3}\right]\cup\left(2;\frac{8}{3}\right]$; б) $\left(-3;-\frac{7}{3}\right]\cup\left(-2;-\frac{4}{3}\right]\cup$

$\cup\left(-1;-\frac{1}{3}\right]\cup\left(0;\frac{2}{3}\right]$.

3.244. 2) $\left(-\frac{5\pi}{8};-\frac{13\pi}{24}\right)\cup\left(-\frac{3\pi}{8};-\frac{7\pi}{24}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{8};-\frac{\pi}{24}\right)\cup\left(\frac{\pi}{8};\frac{5\pi}{24}\right)$;

4) $(-2;\ 0)$.

3.245. 1) $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$, $x\neq\frac{\pi}{3}$; 3) $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

3.246. 2) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right]$, $n\in Z$.

3.247. 1) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi k\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $k,\ n\in Z$;

3) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi+\pi n\right)$, $n\in Z$.

3.248. 2) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in Z$; 4) $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$, $n\in Z$;

6) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\operatorname{arctg}9+\pi k\right)\cup\left(\operatorname{arctg}3+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $k,\ n\in Z$;

8) $(\pi-\operatorname{arcctg}3+\pi k;\ \pi+\pi k)\cup(\pi n;\ \operatorname{arcctg}2+\pi n)$, $k,\ n\in Z$.

3.249. 1) $\left[-\frac{3\pi}{20}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{10}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi k}{2}\right]\cup$

$\cup\left[\frac{\pi}{10}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{4}{9}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{7\pi}{20}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $k,\ n\in Z$;

3) $\left[\frac{\pi}{14}+\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{18}{5}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{4\pi}{7}-\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{6}{5}+\frac{\pi n}{2}\right]$, $n\in Z$.

3.250. 2) $\left(\operatorname{arcctg}2+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$;

4) $[\pi-\operatorname{arctg}4+\pi k;\ \pi k)\cup(\pi n;\ \operatorname{arctg}2+\pi n]$, $k,\ n\in Z$.

дукацыйны партал www.adu.by

СОДЕРЖАНИЕ

От авторов 3

Глава 1
Производная

1.1. Функция 5
1.2. Угловой коэффициент прямой 16
1.3. Приращение функции 21
1.4. Производная 26
1.5. Механический смысл производной 34
1.6. Геометрический смысл производной 39
1.7. Теоремы о вычислении производных 46
1.8. Возрастание и убывание функции 52
1.9. Максимумы и минимумы функции 59
▲1.10. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке ... 65
▲1.11. Наибольшее и наименьшее значения функции на интервале ... 70
1.12. Первообразная 74

Глава 2
Тригонометрические выражения

2.1. Градусная мера углов и дуг 77
2.2. Угол как мера поворота 81
2.3. Радианная мера углов и дуг 88
2.4. Синус и косинус произвольного угла 91
2.5. Свойства выражений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ 100
2.6. Понятие арксинуса и арккосинуса 108
2.7. Тангенс и котангенс произвольного угла 115
2.8. Понятие арктангенса и арккотангенса 123
2.9. Соотношения между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом одного и того же угла 128
2.10. Формулы приведения 134
2.11. Формулы сложения 140
2.12. Формулы двойного и половинного углов 148
2.13. Преобразование произведения в сумму (разность). Преобразование суммы (разности) в произведение 154
▲2.14. Выражение синуса, косинуса и тангенса угла через тангенс половинного угла 161
▲2.15. Преобразования некоторых тригонометрических выражений ... 164

Глава 3
Тригонометрические функции

3.1. Тригонометрические функции. Периодичность 171
▲3.2. Периодические функции 177
3.3. Функция $y=\sin x$ 184
3.4. Функция $y=\cos x$ 192
▲3.5. Преобразование графиков функций 200
3.6. Функция $y=\operatorname{tg} x$ 212
3.7. Функция $y=\operatorname{ctg} x$ 219
▲3.8. Функции $y=\arcsin x$ и $y=\arccos x$ 227
▲3.9. Функции $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$ 238
3.10. Решение уравнений вида $\sin x=a$, $\cos x=a$ 246
3.11. Решение уравнений вида $\operatorname{tg} x=a$, $\operatorname{ctg} x=a$ 254
3.12. Тригонометрические уравнения 260
▲3.13. Тригонометрические уравнения (продолжение) 268
▲3.14. Системы тригонометрических уравнений 279
▲3.15. Решение неравенств вида $\sin x<a$, $\sin x>a$, $\sin x\leqslant a$, $\sin x\geqslant a$ .. 284
▲3.16. Решение неравенств вида $\cos x<a$, $\cos x>a$, $\cos x\leqslant a$, $\cos x\geqslant a$ .. 294
▲3.17. Решение неравенств вида $\operatorname{tg} x<a$, $\operatorname{tg} x>a$, $\operatorname{tg} x\leqslant a$, $\operatorname{tg} x\geqslant a$, $\operatorname{ctg} x<a$, $\operatorname{ctg} x>a$, $\operatorname{ctg} x\leqslant a$, $\operatorname{ctg} x\geqslant a$ 300

Ответы 307

дукацыйны партал

(Название и номер школы)

Учебный год	Имя и фамилия ученика	Состояние учебного пособия при получении	Оценка ученику за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Кузнецова Елена Павловна
Муравьева Галина Леонидовна
Шнеперман Лев Борисович
Ящин Борис Юрьевич

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 11 класса
общеобразовательных учреждений
с русским языком обучения
с 12-летним сроком обучения
(базовый и повышенный уровни)

2-е издание, переработанное

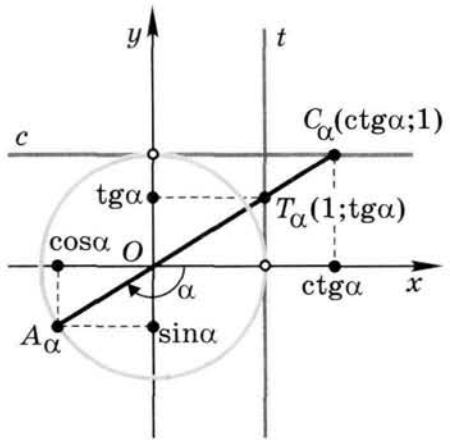
Зав. редакцией *В. Г. Бехтина*. Редакторы *Н. М. Алганова, К. М. Лукашевич*. Оформление *Е. Э. Агунович*. Художественный редактор *А. А. Волотович*. Технический редактор *Е. В. Прудывус*. Корректоры *Д. Р. Лосик, В. С. Бабеня, Е. П. Тхир, Т. Н. Ведерникова, А. В. Алешко.*

Подписано в печать 03.03.2008. Формат $60 \times 90\,^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Офсетная печать. Усл. печ. л. 21 + 0,25 форз. Уч.-изд. л. 13,31 + 0,19 форз. Тираж 118 000 экз. Заказ 790.

Издательское республиканское унитарное предприятие
«Народная асвета» Министерства информации Республики Беларусь.
ЛИ № 02330/0131732 от 01.04.2004.
220004, Минск, проспект Победителей, 11.

ОАО «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
ЛИ № 02330/0056617 от 27.03.2004.
220600, Минск, Красная, 23.

А у www.adu.by



Тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{ctg}\alpha = 1$$

Формулы приведения

Угол	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
sin	cosα	cosα	sinα	−sinα	−cosα	−cosα	−sinα
cos	sinα	−sinα	−cosα	−cosα	−sinα	sinα	cosα
tg	ctgα	−ctgα	−tgα	tgα	ctgα	−ctgα	−tgα
ctg	tgα	−tgα	−ctgα	ctgα	tgα	−tgα	−ctgα

Теоремы сложения

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

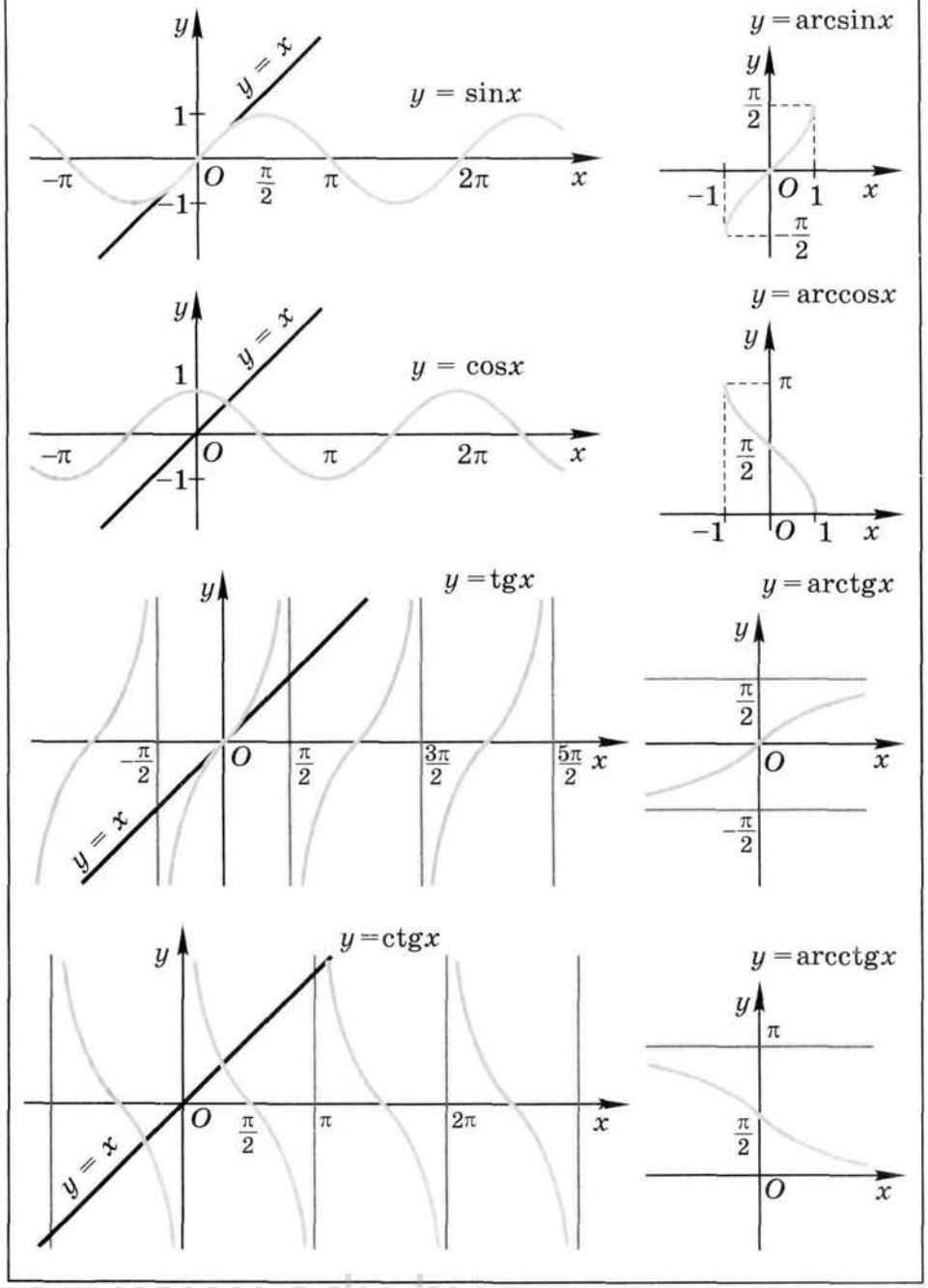
Формулы преобразования произведения в сумму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Формулы двойного угла

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Графики тригонометрических функций



Адукацыйны партал www.adu.by